UNIVERSITÄT ULM

Abgabe:

Bis 04.11.13, 12:30 Uhr

Briefkasten vor H3

Dr. G. Baur

M. Gerlach

Wintersemester 13/14

26 Punkte

Übungen zur Analysis 2

Blatt 3

10. Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in [a, b]$ derart, dass f integrierbar ist und $f(x) = g(x)$ für alle $x \neq x_0$. Zeige, dass g integrierbar mit (4)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

11. Finde eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f \notin R[a, b]$ aber $|f| \in R[a, b]$. (2)

12. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und (2)

$$\mathscr{F}(x) := \int_a^x (x - t) f(t)\,\mathrm{d}t$$

für alle $x \in [a, b]$. Zeige, dass $\mathscr{F}$ zweimal stetig differenzierbar ist mit $\mathscr{F}'' = f$.

13. Bestimme und klassifiziere alle lokalen Extremstellen der durch (2)

$$F(x) := \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

gegebenen Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

14. (a) Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\sup_{x \in (a,b)} |f'(x)| < \infty$. Zeige, dasss f auf (a, b) gleichmäßig stetig ist. (2)

(b) Zeige, dass $f(x) := \sqrt{x}$ auf $[0, \infty)$ gleichmäßig stetig ist. (3)

(c) Finde eine stetige Funktion $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ die nicht gleichmäßig stetig ist. (3)

15. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Ist $f'(a) > 0$ und $f'(b) < 0$, so ist weder a noch b lokale Maximumstelle von f. (2)

Erinnerung: Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in a und b, wenn die einseitigen Ableitungen $f'_+(a)$ und $f'_-(b)$ existieren.

(b) Es sei $f'(a) > 0$ und $f'(b) < 0$. Zeige, dass $f'(\xi) = 0$ für ein $\xi \in (a, b)$. (2)

(c) Es sei $f'(a) \neq f'(b)$. Zeige, dass die Ableitung f' jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ annimmt. (2)

(d) Zeige, dass die durch $g(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ gegebene Funktion $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ integrierbar ist, jedoch keine Stammfunktion besitzt. (2)