



## Übungen zur Analysis 2

18. (a) Zeige, dass (3)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k-\alpha} = \log(2)$$

für alle  $\alpha \in (0, 1)$ .

- (b) Es seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar und  $f(x) = g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$ . Zeige, dass (3)

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

19. Untersuche nachfolgende uneigentliche Integrale auf Konvergenz. (6x2)

(a)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$

(c)  $\int_1^{\infty} \frac{\cos(4x^5 - 8)}{x\sqrt{x}} dx$

(e)  $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}} dx$

(b)  $\int_0^1 \sqrt{x} \log x dx$

(d)  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$

(f)  $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x^2} dx$

20. Zeige, dass (2)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

21. In dieser Aufgabe studieren wir Gemeinsamkeiten und Unterschiede von uneigentlichen Integralen und unendlichen Reihen.

- (a) Es sei  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  monoton fallend. Zeige, dass (4)

$$\int_0^{\infty} f(x) dx < \infty \iff \sum_{k=0}^{\infty} f(k) < \infty.$$

- (b) Gib ein Beispiel einer Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  derart, dass das uneigentliche Riemannintegral (2)

$$\int_0^{\infty} f(x) dx$$

konvergiert, aber  $\sup\{f(x) : x \geq T\} = \infty$  für alle  $T > 0$ .