Universität Ulm
Abgabe:
Bis 25.11.13, 12:30 Uhr
Briefkasten vor H3

Dr. G. Baur
M. Gerlach
Wintersemester 13/14

26 Punkte

Übungen zur Analysis 2

Blatt 6

22. Bestimme den Konvergenzradius folgender Potenzreihen. (3x2)

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} k! z^k$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} k!(-1)^k \left(\frac{z}{k}\right)^{2k}$ (c) $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} z^k$

23. Bestimme jeweils alle $z \in \mathbb{C}$, für die die folgenden Potenzreihen konvergieren. (2x2)

(a) $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} z^k$

24. Entscheide, ob nachstehende Funktionenfolgen gleichmäßig auf $M \subset \mathbb{R}$ konvergieren. (5x2)

(a) $f_n(x) = e^{-nx}, \quad M = [0, \infty)$

(b) $f_n(x) = e^{-nx}, \quad M = (0, \infty)$

(c) $f_n(x) = e^{-nx}, \quad M = [\delta, \infty)$ für alle $\delta > 0$.

(d) $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} \cos(kx), \quad M = \mathbb{R}$

(e) Es sei $M = [0, 1]$, (q_n) eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap M$ und

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in \{q_1, \dots, q_n\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

25. Berechne (2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{2^k} \cos(kx) \, \mathrm{d}x.$$

26. Es sei $M \subset \mathbb{R}$ und $f_n : M \to \mathbb{R}$ eine Folge von Funktionen, die punktweise gegen die Grenzfunktion $f : M \to \mathbb{R}$ konvergiere. (2x2)

(a) Zeige, dass die Folge (f_n) genau dann gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn für jede Folge $(x_n) \subset M$ gilt: $\lim f_n(x_n) - f(x_n) = 0$.

Nun sei $M = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und die Funktionen f_n stetig.

(b) Zeige, dass die Folge (f_n) genau dann gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn für jede konvergente Folge (x_n) aus M gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n).$$