Übungen zur Analysis 2

Blatt 7

27. Entwickle, falls möglich, die folgende Funktionen jeweils in eine Potenzreihe um 0 und gib ihren Konvergenzradius an. (3x2)

(a) $\arctan(x)$ (b) $\dfrac{1}{(x-2)^2}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{1-2x^3}}$

28. Gib jeweils eine Stammfunktion (als unendliche Reihe) der nachfolgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an. (2x2)

(a) $f(x) = e^{-x^2}$ (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0. \end{cases}$

29. Berechne den Grenzwert (3)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x^4)^7 - 1}{(\sqrt[3]{1+x^3} - 1)(\sqrt{1+x} - 1)}.$$

30. Eine Folge (a_n) sei rekursiv durch

$$\begin{aligned} &a_0 = 0,\ a_1 = 3 \\ &a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} \text{ für } n \geq 2 \end{aligned} \tag{R}$$

erklärt (also $a_2 = 21$, $a_3 = 117$ u.s.w.) Im Folgenden wollen wir eine explizite Formel für a_n bestimmen.

(a) Betrachte die formale Reihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ und versuche, aus (R) eine Darstellung für $f(x)$ herzuleiten. (2)
(Kontrollergebnis: $f(x) = \frac{3x}{10x^2-7x+1}$)

(b) Entwickle die Darstellung von $f(x)$ wieder in eine Potenzreihe und versuche, auf (a_n) zu schließen. (2)

(c) Kontrolliere, dass deine Lösung der Gleichung (R) genügt. (1)

31. Skizze die folgenden Kurven und entscheide, ob sie rektifizierbar sind. Bestimme ggf. ihre Bogenlängen. (2x3)

(a) $\gamma(t) := \begin{cases} (t, t\sin\frac{1}{t})^T & 0 < t \leq 1 \\ (0,0)^T & t = 0 \end{cases}$ für $t \in [0,1]$.

(b) $\gamma(t) := \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$ für $t \in [0, 2\pi]$.

Hinweis: Verwende die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus.