Übungen zur Analysis 2

Blatt 8

32. Zeige, dass die Vereinung endlich vieler abgeschlossener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ wieder abgeschlossen ist. (2+2)

Finde außerdem ein Beispiel unendlich vieler abgeschlossener Mengen, deren Vereinigung nicht abgeschlossen ist.

33. Bestimme – ohne Beweis – jeweils das Innere, den Rand, den Abschluss und alle Häufungspunkte folgender Mengen M in $\mathbb{R}^2$.

(a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2 \text{ und } x < y + 2 \right\}$ (2)

(b) $M = \left(\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y < 0 \right\} \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 1/n \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N} \right\} \right) \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1/n \\ 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{N} \right\}$ (3)

(c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1/n \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{Q} \right\}$ (2)

34. Beweise für alle Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$ die folgenden Aussagen: (2+1+1)

(a) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$

(b) $(A \overset{\circ}{\cup} B) \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$

Zeige außerdem, dass im Allgemeinen nicht $(A \overset{\circ}{\cup} B) = \mathring{A} \cup \mathring{B}$ gilt.

35. Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$. Zeige, dass (4)

$$U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y) = \emptyset \;\Leftrightarrow\; \|x - y\| \geq 2\varepsilon.$$

36. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass $x \in \overline{M}$ genau dann, wenn es eine Folge $(x_k) \subset M$ gibt mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x$. (4)

37. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = xy$. Zeichne die Niveaumengen N_c von f zu den Niveaus $c = 0$, $c = 1$, $c = 2$ und $c = 3$ zusammen mit der Menge (3)

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 4 \right\}$$

in ein gemeinsames Bild.

Gib mit Hilfe dieser Zeichnung eine Schätzung für $\max\{f(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$ ab.