Lösungen zur Analysis 2

Dieses Übungsblatt wird nicht korrigiert!

68. Entscheide, ob folgende Vektorfelder $f : G \to \mathbb{R}^n$ Gradientenfelder sind und bestimme ggf. eine Stammfunktion von f auf G. Berechne außerdem $\int_\gamma f$ für die jeweils angegebene(n) Kurve(n) γ.

(a) Es sei $n = 3$, $G = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : y > 0\}$, $\gamma : [0, 2\pi] \to G$ gegeben durch $\gamma(t) := (\cos t, 2 + \sin t, t)^T$ sowie

$$f(x, y, z) := \left(z^2, \frac{e^z}{y} + y, 2xz + e^z \log y\right).$$

(b) Es sei $n = 2$, $G = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)^T\}$ und $f(x, y) := \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$. Dazu seien die Kurven

$$\gamma : [0, 3/2 \cdot \pi] \to G,\ \gamma(t) := (\sin t, \cos t)^T$$

und

$$\gamma : [0, 1] \to G,\ \gamma(t) := (-t, 1 - t)^T$$

gegeben.

Lösung:

(a) Die Menge G ist sternförmig und f erfüllt die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \text{ für alle } i, j \in \{1, 2, 3\}.$$

Somit ist f ein Gradientenfeld. Jede Stammfunktion ist von der Form

$$F(x, y, z) = xz^2 + e^z \log y + \varphi(x, y)$$

mit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Da $F_x = z^2$, ist φ unabhängig von x. Aus der Bedingung $F_y = e^z/y + y$ erhalten wir, dass φ von der Form $\varphi(x, y) = y^2/2 + c$ für eine Konstante c ist. Also ist z.B.

$$F(x, y, z) := xz^2 + e^z \log y + \frac{y^2}{2}$$

eine Stammfunktion von f. Für das Kurvenintegral ergibt sich somit

$$\int_\gamma f = F(\gamma(2\pi)) - F(\gamma(0)) = F(1, 2, 2\pi) - F(1, 2, 0) = 4\pi^2 + e^{2\pi} \log 2 - \log 2.$$

(b) Obwohl f den Integrabilitätsbedingungen genügt, ist f kein Gradientenfeld, denn – wie in der Vorlesung gesehen – ergibt sich für das Integral über den geschlossenen Weg

$$\gamma[0, 2\pi] \to G,\ \gamma(t) := (\sin t, \cos t)^T$$

$$\int_\gamma f = \int_0^{2\pi} (-\cos t, \sin t) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \, \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} -1 \, \mathrm{d}t = -2\pi \neq 0.$$

Integriert man über den in der Aufgabenstellung angegebenen Bereich von 0 bis $\frac{3}{2}\pi$, so erhält man

$$\int_\gamma f = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} -1 \, \mathrm{d}t = -\frac{3}{2}\pi.$$

Für die zweite Kurve erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f &= \int_0^1 \left(\frac{t-1}{t^2+(1-t)^2}, \frac{-t}{t^2+(1-t)^2} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{2t^2-2t+1} \, \mathrm{d}t \\
&= \arctan(2t-1) \Big|_{t=0}^{1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$