Universität Ulm
Besprechung der Lösungen:
Montag, 21.10.13

Prof. Dr. W. Arendt
M. Gerlach
Wintersemester 13/14

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 1

1. Es sei E ein Banachraum und $F \subset E$ ein Untervektorraum. Zeige, dass $\overline{F}$ ebenfalls ein Untervektorraum ist.

2. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der Vektorraum

$$c_0 := \{(x_n) \subset \mathbb{R} : \lim x_n = 0\}$$

versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum ist. Zeige, dass der Untervektorraum der abbrechenden Folgen

$$c_{00} := \{(x_n) \in c_0 : \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N\ x_n = 0\}$$

in c_0 dicht ist, d.h. $\overline{c_{00}} = c_0$.

3. Wir definieren den Vektorraum der summierbaren Folgen

$$\ell^1 := \{(x_n) \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$$

und versehen ihn mit der Norm

$$\|(x_n)\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|.$$

Zeige, dass ℓ^1 ein Banachraum ist unter Verwendung der Tatsache, dass ℓ^1 versehen mit $\|\cdot\|_1$ ein normierter Vektorraum ist.

Zeige, dass c_{00} ein dichter Unterraum von ℓ^1 ist.

4. Wir definieren den Vektorraum der beschränkten Folgen $\ell^\infty := \mathscr{F}^b(\mathbb{N})$. Zeige oder widerlege:

$$\{(x_n) \in \ell^\infty : |x_n| < 1\}$$

ist eine offene Teilmenge von ℓ^∞.