Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 6

23. Es sei K ein kompakter topologischer (oder metrischer) Raum und $T : C(K) \to C(K)$ linear mit folgender Eigenschaft: Für alle $f_n, f \in C(K)$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_K (f_n - f)\, \mathrm{d}\mu \right| = 0 \ \forall \mu \in \mathscr{M}(K) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \left| \int_K (Tf_n - Tf)\, \mathrm{d}\mu \right| = 0 \ \forall \mu \in \mathscr{M}(K).$$

Zeige, dass T stetig ist.

24. Es sei E ein reeller Banachraum und E_+ ein abgeschlossener Kegel in E, d.h. $E_+ \neq \emptyset$, $\lambda E_+ \subset E_+$ für alle $\lambda \geq 0$ und $E_+ + E_+ \subset E_+$. Ein Funktional $\varphi \in E'$ heißt *positiv (bzgl. E_+)*, falls $\varphi(x) \geq 0$ für alle $x \in E_+$.

(a) Zeige, dass die Abbildung $p_E : E \to [0, \infty)$, $p_E(x) := \operatorname{dist}(x, -E_+)$ sublinear ist.

(b) Zeige, dass ein Funktional $\varphi \in E'$ genau dann positiv ist, wenn es ein $c > 0$ gibt mit $\varphi(x) \leq c p_E(x)$ für alle $x \in E$.

(c) Es sei $F \subset E$ ein abgeschlossener Unterraum und $F_+ := F \cap E_+$. Für alle $x \in F$ gelte zudem $p_F(x) := \operatorname{dist}(x, -F_+) = p_E(x)$. Zeige, dass jedes bzgl. F_+ positive Funktional $\varphi \in F'$ zu einem bzgl. E_+ positiven Funktional $\Phi \in E'$ mit $\|\Phi\| = \|\varphi\|$ fortgesetzt werden kann.

25. In dieser Aufgabe wollen wir den Satz von Hahn-Banach auf komplexe Vektorräume verallgemeinern. Sei dazu E ein komplexer Vektorraum und $F \subset E$ ein Untervektorraum.

(a) Zeige, dass eine Abbildung $\varphi : E \to \mathbb{C}$ genau dann $\mathbb{C}$-linear ist, wenn es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\tau : E \to \mathbb{R}$ gibt mit $\varphi(x) = \tau(x) - i\tau(ix)$ für alle $x \in E$.

(b) Es sei $p : E \to \mathbb{R}$ sublinear und $\varphi : F \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung mit $\mathrm{Re}\varphi(x) \leq p(x)$ für alle $x \in F$. Zeige, dass es eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung $\Phi : E \to \mathbb{C}$ gibt, sodass $\Phi|_F = \varphi$ und $\mathrm{Re}\Phi(x) \leq p(x)$ für alle $x \in E$.

Im folgenden sei E ein normierter komplexer Vektorraum.

(c) Es sei $\varphi : E \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{C}$-lineare Abbildung. Zeige, dass $|\varphi(x)| \leq \|x\|$ genau dann, wenn $|\mathrm{Re}\varphi(x)| \leq \|x\|$.

(d) Es sei $\varphi \in F'$. Zeige, dass es ein $\Phi \in E'$ gibt mit $\Phi|_F = \varphi$ und $\|\Phi\| = \|\varphi\|$.

Bemerkung: $\mathbb{K}$-linear bedeutet additiv und $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.

26. **Bonusaufgabe:** Es sei K ein kompakter topologischer (oder metrischer) Raum und $A_1, A_2 \subset K$ disjunkt und abgeschlossen. Zeige, dass es offene disjunkte Mengen $V_1, V_2 \subset K$ gibt mit $A_1 \subset V_1$ und $A_2 \subset V_2$.

Bemerkung: Ein kompakter Raum ist nach Definition Hausdorff, d.h. für $x \neq y$ existieren disjunkte offene Mengen $O, V \subset K$ mit $x \in O$ und $y \in V$.