Übungen Dynamische Systeme: Blatt 01

1. Sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $\Phi : \mathbb{R} \times M \to M$ ein dynamisches System. Ein Punkt $x \in M$ heißt *Equilibrium* (oder *Gleichgewichtspunkt*) von Φ, wenn $\Phi(t, x) = x$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

(a) Zeigen Sie: Die Menge der Equilibria von Φ ist abgeschlossen. (1)

(b) Zeigen Sie: Ein Punkt $x \in M$ ist genau dann ein Equilibrium von Φ, wenn es ein $y \in M$ gibt, für das $\Phi(t, y) \to x$ für $t \to \infty$ gilt. (2)

(c) Geben Sie ein Beispiel eines dynamischen Systems an, welches kein Equilibrium besitzt. (2)

(d) Sei $x \in M$ ein Equilibrium von Φ. Zeigen Sie: Verläuft eine Trajektorie von Φ durch x, so besteht die gesamte Trajektorie nur aus dem Punkt x. (2)

2. Ein Equilibrium eines semidynamischen Systems ist analog zum Equilibrium eines dynamischen Systems definiert. Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass Aussage (d) aus Aufgabe 1 für semidynamische Systeme im Allgemeinen falsch ist. (2*)

3. Es sei $J := [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (mit $t_0 < t_1$) und es seien $\alpha, \beta > 0$. Die Funktion $\varphi \in C^1(J; \mathbb{R})$ erfülle die Ungleichungen $\varphi(t_0) \geq 0$ und (3)

$$\dot{\varphi}(t) \leq -\alpha\varphi(t) + \beta \quad \text{für alle } t \in J. \qquad (*)$$

Zeigen Sie, dass $\varphi(t) \leq \varphi(t_0) + \frac{\beta}{\alpha}$ für alle $t \in J$ gilt.

Tipp: Multiplizieren Sie $(*)$ *zunächst mit einem geeigneten Faktor.*

4. Sei (K, d) ein kompakter metrischer Raum und sei $C(K) := \{f : K \to \mathbb{R} | \, f \text{ ist stetig}\}$ die Menge der reellwertigen, stetigen Funktionen auf K. Mit $\|\cdot\|_\infty$ bezeichnen wir die Supremumsnorm auf $C(K)$ und für $f, g \in C(K)$ sei $d_\infty(f, g) := \|f - g\|_\infty$. Damit ist $(C(K), d_\infty)$ ebenfalls ein metrischer Raum.

Sei $\Phi : [0, \infty) \times K \to K$ ein semidynamisches System. Wir definieren nun eine weitere Abbildung $\Psi : [0, \infty) \times C(K) \to C(K)$ durch

$$\Psi(t, f) = f(\Phi(t, \cdot)).$$

für alle $t \in [0, \infty)$ und für alle $f \in C(K)$.

(a) Zeigen Sie, dass Ψ ein semidynamisches System auf dem metrischen Raum $(C(K), d_\infty)$ ist. (4*)
Bemerkung: Man bezeichnet Ψ *auch als den „von* Φ *induzierten Koopman-Halbfluss“.*

(b) Überlegen Sie sich, wie man Ψ anschaulich interpretieren kann. (0*)

(c) Warum ist es sinnvoll zu sagen, dass Ψ „in der Zeit rückwärts läuft“? (0*)