Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 28.10.2015

Prof. Dr. Rico Zacher
Jochen Glück
Wintersemester 2015/16
Punktzahl: 13+4*

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 02

5. In einem Wassergefäß seien zwei chemische Substanzen A und B in den Konzentrationen c_A und c_B gelöst. Die beiden Stoffe reagieren entsprechend der Gleichung $A + 2B \longrightarrow C$ zu einer Substanz C, welche nicht weiter mit A und B reagiert. Weil die Reaktionsgeschwindigkeit proportional zum Produkt der Konzentrationen der Reaktanten ist, erfüllen c_A und c_B das Differentialgleichungssystem

$$(*) \qquad \begin{cases} \dot{c}_A = -kc_Ac_B^2, \\ \dot{c}_B = -2kc_Ac_B^2, \end{cases}$$

wobei $k > 0$ eine Konstante ist. Zudem seien die Anfangsbedingungen $c_A(0) = c_{A,0} \geq 0$ und $c_B(0) = c_{B,0} \geq 0$ gegeben.

(a) Zeigen Sie: Die Funktion $F(c_A, c_B) := 2c_A - c_B$ ist ein erstes Integral der Differentialgleichung $(*)$, d.h. wann immer $t \mapsto (c_A(t), c_B(t))$ eine Lösung von $(*)$ ist, hängt $F(c_A(t), c_B(t))$ nicht von t ab. (1)

(b) Zeigen Sie, dass das gegebene Anfangswertproblem eine eindeutig bestimmte maximale Lösung besitzt und dass $c_A(t) \geq 0$ und $c_B(t) \geq 0$ für alle t aus dem Definitionsbereich der Lösung gilt. (2)

(c) Skizzieren Sie das Phasenportrait von $(*)$ im ersten Quadranten. (1)

(d) Zeigen Sie, dass die Lösung des gegebenen AWPs für alle $t \geq 0$ existiert und bestimmen Sie, falls existent, $\lim_{t\to\infty} c_A(t)$ und $\lim_{t\to\infty} c_B(t)$. (3)

6. Zwei Protonen mit der Masse $m > 0$ und der Elementarladung $e > 0$ bewegen sich im leeren dreidimensionalen Raum. Die Positionen der beiden Protonen werden mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$ und ihre Geschwindigkeiten mit $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet. Das System ist nur wohldefiniert, solange $x_1 \neq x_2$ gilt. Aus dem Coulombschen Gesetz und den Newtonschen Axiomen erhält man, dass die Protonen dem Differentialgleichungssystem

$$(*) \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 &= v_1 \\ \dot{x}_2 &= v_2 \\ \dot{v}_1 &= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m} \frac{x_1 - x_2}{\|x_1 - x_2\|^3} \\ \dot{v}_2 &= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m} \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|^3} \end{cases}$$

genügen. Dabei bezeichnet $\varepsilon_0 > 0$ eine physikalische Konstante (die sogenannte *elektrische Feldkonstante*) und $\|\cdot\|$ die euklidische Norm.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion (2)

$$E := \frac{1}{2} m\big(\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2\big) + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\|x_1 - x_2\|}$$

ein erstes Integral des Differentialgleichungssystems $(*)$ ist.

Bemerkung: Aus physikalischer Sicht ist E die Gesamtenergie des Systems.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a): Die beiden Protonen halten einen (von den Anfangsdaten abhängigen) Mindestabstand voneinander, genauer: Für jede Lösung $t \mapsto (x_1(t), x_2(t), v_1(t), v_2(t))$ von $(*)$ gibt es eine Zahl $\delta > 0$ derart, dass $\|x_1(t) - x_2(t)\| \geq \delta$ für alle t im Definitionsbereich der Lösung gilt. (1)

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (a): Für keine Lösung von $(*)$ tritt ein Blow up auf. (1)

(d) Zeigen Sie, dass jede maximale Lösung von $(*)$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. (2)

7. Seien die Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ durch

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir betrachten die lineare Differentialgleichung

$$(*) \quad \dot{x} = Bx.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x, Ax \rangle$ ein erstes Integral der Differentialgleichung $(*)$ ist; hierbei bezeichnet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$. (1*)

(b) Skizzieren Sie das Phasenportrait von $(*)$. (3*)
Tipp: Zeigen Sie zuerst, dass A positiv definit ist um zu folgern, dass die Höhenlinien der Abbildung $x \mapsto \langle x, Ax \rangle$ Ellipsen sind. Diagonalisieren Sie anschließend A um herauszufinden, wie diese Ellipsen aussehen.