Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 02.12.2015

Prof. Dr. Rico Zacher
Jochen Glück
Wintersemester 2015/16
Punktzahl: 11+2*

# Übungen Dynamische Systeme: Blatt 07

**19.** Durch geeignete Skalierung lässt sich das Virenmodell aus den Aufgaben 9 und 11 in das Differentialgleichungssystem

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = z - \xi x \\ \dot{y} = \sigma - \rho y - xy \\ \dot{z} = xy - z \end{cases}$$

umschreiben, wobei $\xi, \sigma, \rho > 0$ Konstanten sind. Das zweite Equilibrium der Differentialgleichung ist dann von der Form $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = (\frac{\sigma}{\xi} - \rho, \xi, \sigma - \rho\xi)$ und wir nehmen $\sigma > \rho\xi$ an, damit das Equilibrium im Inneren von $\mathbb{R}^3_+$ liegt.

In Aufgabe 11 haben wir bereits mit der Methode der linearisierten Stabilität gezeigt, dass dieses Equilibrium asymptotisch stabil ist. Nun wollen wir mit Hilfe einer Ljapunov-Funktion noch etwas mehr herausfinden.

(a) Zeigen Sie, dass (4)

$$\Phi(x, y, z) = x - \overline{x} \ln x + y - \overline{y} \ln y + z - \overline{z} \ln z$$

auf $(0, \infty)^3$ eine strikte Ljapunov-Funktion für $(*)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Equilibrium $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ global asymptotisch stabil in $(0, \infty)^3$ ist. (2)

**20.** Let $\beta \in \mathbb{R}$ and consider the differential equation

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = -\frac{1}{2}x^3 + xy^2 \\ \dot{y} = \beta x^2 y - \frac{1}{2}y^3 \end{cases}$$

in $\mathbb{R}^2$. Obviously, $(0, 0)$ is an equilibrium of $(*)$.

(a) Prove that the equilibrium $(0, 0)$ is globally asymptotically stable if $\beta < \frac{1}{4}$. (5)

(b) Prove that the equilibrium $(0, 0)$ is stable, but not asymptotically stable if $\beta = \frac{1}{4}$. (2*)