Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 13.01.2016

Prof. Dr. Rico Zacher
Jochen Glück
Wintersemester 2015/16
Punktzahl: 12+5*

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 11

27. Consider the following (scaled) system which models two competing species:

$$(*) \qquad \begin{cases} \dot{u} = u - \alpha_1 u^2 - uv, \\ \dot{v} = \beta v - \alpha_2 v^2 - uv. \end{cases}$$

Here, $\alpha_1, \alpha_2, \beta > 0$ are parameters and we assume throughout that the initial values fulfil $(u,v)(0) = (u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2_+$.

(a) Show that $\mathbb{R}^2_+$ is positively invariant with respect to $(*)$ (1*)

(b) Compute all equilibria of $(*)$ which are of biological relevance (meaning that they are located in $\mathbb{R}^2_+$). Use the principle of linearised stability, whenever applicable, to analyse the stability properties of these equilibria. (4)

(c) Draw the phase portrait of $(*)$ in $\mathbb{R}^2_+$. Note that the phase portrait depends on the parameters $\alpha_1, \alpha_2, \beta$ and that thus you might have to distinguish several cases. (4)

(d) Use invariance techniques to discuss the long-term behaviour of the solutions of $(*)$ (which depends on the parameters). (4*)

28. Wir betrachten die folgende Differentialgleichung in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$:

$$(*) \qquad \begin{cases} \dot{x} = -x\big(\sqrt{x^2+y^2} - 1\big)^3 - y\big(\sqrt{x^2+y^2} - 1\big)^2, \\ \dot{y} = -y\big(\sqrt{x^2+y^2} - 1\big)^3 + x\big(\sqrt{x^2+y^2} - 1\big)^2. \end{cases}$$

Man kann nachrechnen, dass diese Differentialgleichung in Polarkoordinaten die Form

$$(**) \qquad \begin{cases} \dot{r} = -r(r-1)^3, \\ \dot{\varphi} = (r-1)^2 \end{cases}$$

hat, wobei $(r, \varphi) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ gilt.

(a) Berechnen Sie alle Equilibria von $(**)$ (bzw. von $(*)$) und diskutieren Sie das Langzeitverhalten von $r(t)$ für eine beliebige Lösung von $(**)$. (1)

(b) Sei (r, φ) eine Lösung von $(**)$. Leiten Sie eine Formel für φ in Abhängigkeit von r her und diskutieren Sie das Langzeitverhalten von $\varphi(t)$. (2)

(c) Bestimmen Sie die ω-Limesmenge einer beliebigen Lösung von $(*)$. Kann eine Lösung von $(*)$ für $t \to \infty$ konvergieren? (1)