UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Mittwoch, 27.01.2016

Prof. Dr. Rico Zacher
Jochen Glück
Wintersemester 2015/16
Punktzahl: 11+5*

Übungen Dynamische Systeme: Blatt 13

30. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass die Aussage von Satz 5.16 im Allgemeinen falsch ist, wenn G nicht einfach zusammenhängend ist. Sei dazu $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und sei $f : G \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{div} f(x,y) > 0$ für alle $(x,y) \in G$ gilt. (2)

(b) Zeigen Sie, dass die periodische Funktion $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x,y)$ ist. (1)

31. Sei $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und sei $F := -U'$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= F(x) \end{cases}$$

für $(x,v) \in G := \mathbb{R}^2$. Zudem setzen wir $E(x,v) := \frac{1}{2}v^2 + U(x)$ für alle $(x,v) \in \mathbb{R}^2$. Es sei $x_1 < x_2$ mit $U(x) < U(x_1) = U(x_2)$ für alle $x \in (x_1, x_2)$ sowie $U'(x_1) < 0$ und $U'(x_2) > 0$.

Sei nun $(x,v) : J \to \mathbb{R}^2$ eine maximale Lösung von $(*)$ mit $0 \in J$, $x(0) \in [x_1, x_2]$ und $E(x(0), v(0)) = U(x_1) = U(x_2)$.

(a) Zeigen Sie: Die Funktion E ist ein erstes Integral für $(*)$; zudem gilt $x(t) \in [x_1, x_2]$ für alle $t \in J$ sowie $J = \mathbb{R}$. (3)

(b) Zeigen Sie, dass (x,v) periodisch ist. (3)

Tipp: Verwenden Sie den Satz von Poincaré-Bendixon und Satz 5.19 aus der Vorlesung.

Zusatzinformation: Es gibt auch einen elementaren (wenn auch etwas technischen) Beweis dafür, dass (x,v) periodisch ist.

32. Sei $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $U : \Omega \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion und sei $F = -\nabla U$. Zudem sei $\mu : \Omega \to [0, \infty)$ eine C^1-Funktion. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= F(x) - \mu(x)v \end{cases}$$

auf der offenen Teilmenge $G := \Omega \times \mathbb{R}^n$ des $\mathbb{R}^{2n}$.

(a) Sei $\mu(x) > 0$ für alle $x \in \Omega$. Zeigen Sie, dass $E(x,v) := \frac{1}{2}\|v\|^2 + U(x)$ eine strikte Ljapunov-Funktion für $(*)$ ist und folgern Sie, dass $(*)$ keine nicht-triviale periodische Lösung besitzt. (2)

Von nun an gebe es lediglich eine dichte Teilmenge $\tilde{D} \subset \Omega$ derart, dass $\mu(x) > 0$ für alle $x \in \tilde{D}$ gilt.

(b) Sei $n = 1$. Zeigen Sie, dass $E(x,v)$ eine strikte Ljapunov-Funktion für $(*)$ ist und folgern Sie, dass $(*)$ keine nicht-triviale periodische Lösung besitzt. (3*)

Bemerkung: In Beispiel 5.17 in der Vorlesung haben Sie bereits einen anderen Beweis dafür gesehen, dass $(*)$ in diesem Fall keine nicht-triviale periodische Lösung besitzt.

(c) Sei $n \geq 2$, sei $\Omega = \mathbb{R}^n$, $U(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ und $\mu(x) = (\|x^2\| - 1)^2$. Zeigen Sie, dass $(*)$ eine nicht-triviale periodische Lösung besitzt. (2*)

Bemerkung: Dies zeigt, dass $E(x,v)$ in diesem Beispiel keine strikte Ljapunov-Funktion ist. Außerdem zeigt es, dass Satz 5.16 aus der Vorlesung in hoher Dimension nicht richtig bleibt.