



Übungen Dynamische Systeme: Blatt 15

35. Wir betrachten erneut das Lorenz-System

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{cases}$$

im \mathbb{R}^3 , welches Sie bereits aus Aufgabe 12 auf Blatt 4 kennen. Hierbei sind $\sigma, r, b > 0$ Parameter.

- (a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte des Systems.
- (b) Aus Aufgabe 12 wissen wir bereits, dass das Gleichgewicht $(0, 0, 0)$ asymptotisch stabil ist, falls $r < 1$ gilt. Zeigen Sie nun: Falls $r > 1$ gilt, dann ist $(0, 0, 0)$ instabil.
- (c) Sei $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$V(x, y, z) = \frac{x^2}{2\sigma} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$$

gegeben. Zeigen Sie: Ist $r < 1$, so ist V eine strikte Ljapunov-Funktion für (*).

- (d) Zeigen Sie: Ist $r < 1$, so ist das Gleichgewicht $(0, 0, 0)$ global attraktiv.
- (e) Sei nun $\sigma > b + 1$ und $1 < r < r_H$, wobei

$$r_H := \frac{(b + \sigma + 3)\sigma}{\sigma - b - 1}$$

ist. Zeigen Sie, dass dann alle Gleichgewichtspunkte außer $(0, 0, 0)$ asymptotisch stabil sind.