



---

## Übungen Dynamische Systeme: Blatt 15

---

35. Wir betrachten erneut das Lorenz-System

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{cases}$$

im  $\mathbb{R}^3$ , welches Sie bereits aus Aufgabe 12 auf Blatt 4 kennen. Hierbei sind  $\sigma, r, b > 0$  Parameter.

- (a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte des Systems.
- (b) Aus Aufgabe 12 wissen wir bereits, dass das Gleichgewicht  $(0, 0, 0)$  asymptotisch stabil ist, falls  $r < 1$  gilt. Zeigen Sie nun: Falls  $r > 1$  gilt, dann ist  $(0, 0, 0)$  instabil.
- (c) Sei  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$V(x, y, z) = \frac{x^2}{2\sigma} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$$

gegeben. Zeigen Sie: Ist  $r < 1$ , so ist  $V$  eine strikte Ljapunov-Funktion für (\*).

- (d) Zeigen Sie: Ist  $r < 1$ , so ist das Gleichgewicht  $(0, 0, 0)$  global attraktiv.
- (e) Sei nun  $\sigma > b + 1$  und  $1 < r < r_H$ , wobei

$$r_H := \frac{(b + \sigma + 3)\sigma}{\sigma - b - 1}$$

ist. Zeigen Sie, dass dann alle Gleichgewichtspunkte außer  $(0, 0, 0)$  asymptotisch stabil sind.