Universität Ulm

Abgabe: Montag, 29.04.2013

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2013

Lösungen Einführung in die Variationsrechnung II: Blatt 1

1. Sei $G \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und

$$I(x) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t$$

für zulässige Funktionen $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $x \in \mathcal{R}$.

Zeigen Sie: Wenn $f(t,\cdot,\cdot)$ für jedes feste $t \in [a,b]$ konvex ist, dann gilt für jedes zulässige $x \in \mathcal{R}$ und jede zulässige Variation η, dass $\partial^2 I(x;\eta) \geq 0$.

Lösung: Für jedes $(t,x,\dot{x}) \in G$ sei $H(t,x,\dot{x})$ die Hessematrix der Abbildung $f(t,\cdot,\cdot)$ an der Stelle $(x,\dot{x})$. Wegen der Konvexität von f ist $H(t,x,\dot{x})$ für alle $(t,x,\dot{x}) \in G$ positiv semidefinit.

Für jedes zulässige $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ und jede zulässige Variation η gilt dann

$$\partial^2 I(x;\eta) = \int_a^b \begin{pmatrix}\eta(t)\,, & \dot{\eta}(t)\end{pmatrix} \; H(t,x(t),\dot{x}(t)) \; \begin{pmatrix}\eta(t) \\ \dot{\eta}(t)\end{pmatrix} \mathrm{d}t \quad \geq 0.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

2. Sei $k > 0$, $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir setzen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(t,x,\dot{x}) = \cos(kx - \omega t)\dot{x}$. Zudem sei $x_b \in \mathbb{R}$. Wir suchen eine einmal stetig differenzierbare Funktion $x : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, welche das Variationsproblem

$$I(x) = \int_0^{2\pi} f(t,x(t),\dot{x}(t))\,\mathrm{d}t = \min\,, \quad x(0) = 0, x(2\pi) = x_b$$

löst.

(a) Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für das Variationsproblem her und finden Sie heraus, für welche rechten Randwerte x_b die Euler-Lagrange-Gleichung eine Lösung besitzt.

Bestimmen sie die Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung für diejenigen x_b, für die sie existiert.

Lösung: Die Euler-Lagrange-Gleichung lautet $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(t,x,\dot{x}) = \frac{\partial}{\partial x} f(t,x,\dot{x})$. Für unsere Funktion f erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} f(t,x,\dot{x}) &= -\sin(kx - \omega t)k\dot{x}, \\
\frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(t,x,\dot{x}) &= \ \cos(kx - \omega t), \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{x}} f(t,x,\dot{x}) &= -\sin(kx - \omega t)(k\dot{x} - \omega).
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Euler-Lagrange-Gleichung liefert somit:

$$\omega \sin(kx - \omega t) = 0.$$

Wegen $\omega \neq 0$ folgt $kx - \omega t \in \pi\mathbb{Z}$. Weil aber $kx - \omega t$ stetig von t abhängen muss, gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $kx - \omega t = \pi n$ für alle $t \in [0, 2\pi]$.

Aus der Randbedingung $x(0) = 0$ folgt nun $n = 0$, also ist $x = \frac{\omega}{k}t = vt$, wobei wir $v = \frac{\omega}{k}$ gesetzt haben. Notwendig und hinreichend dafür, dass die Euler-Lagrange-Gleichung zusammen mit den Nebenbedingungen gelöst werden kann, ist also offenbar $x_b = 2\pi v = 2\pi\frac{\omega}{k}$ und in diesem Fall ist die Lösung durch $x(t) = vt$ gegeben.

(b) Sei nun x_b derart, dass die Euler-Lagrange-Gleichung eine Lösung $\overline{x}$ besitzt. Sei η eine zulässige Variation. Berechnen Sie die zweite Variation $\partial^2 I(\overline{x};\eta)$.

Diskutieren sie das Vorzeichen der zweiten Variation in Abhängigkeit von der Größe $v := \frac{\omega}{k}$.

Lösung: Sei also $x_b = 2\pi v$ und $\overline{x}(t) = vt$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
&f_{xx}(t,x,\dot{x}) = -\cos(kx-\omega t)k^2\dot{x} && \Rightarrow && f_{xx}(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t)) = -k^2 v,\\
&f_{x\dot{x}}(t,x,\dot{x}) = -\sin(kx-\omega x)k && \Rightarrow && f_{x\dot{x}}(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t)) = 0,\\
&f_{\dot{x}\dot{x}}(t,x,\dot{x}) = 0 && \Rightarrow && f_{\dot{x}\dot{x}}(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t)) = 0.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für jede zulässige Variation η:

$$\begin{aligned}
&\partial^2 I(\overline{x},\eta) =\\
&= \int_a^b f_{xx}(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t))\,\eta^2(t) \;+\; 2f_{x\dot{x}}(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t))\,\eta(t)\dot{\eta}(t) \;+\; f_{\dot{x}\dot{x}}(t,\overline{x}(t),\dot{\overline{x}}(t))\,\dot{\eta}^2(t)\;\mathrm{d}t\\
&= \int_a^b -k^2 v\eta^2(t)\,\mathrm{d}t = -k^2 v\int_a^b \eta^2(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Falls $v > 0$ ist, gilt also für alle zulässigen Variationen η, dass $\partial^2 I(\overline{x},\eta) \le 0$ und falls $v < 0$ ist, gilt für alle zulässigen Variationen η, dass $\partial^2 I(\overline{x},\eta) \ge 0$.

3. Seien $P, Q, R : [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig und $P(t), Q(t), R(t)$ symmetrisch für alle $t \in [a,b]$. Wir setzen $f : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$, $f(t,x,\dot{x}) = x^T Q(t)x + 2x^T R(t)\dot{x} + \dot{x}^T P(t)\dot{x}$ und betrachten das Minimierungsproblem

$$(*) \qquad I(x) = \int_a^b f(t,x(t),\dot{x}(t))\,\mathrm{d}t = \min\,, \quad x(a) = 0,\, x(b) = 0$$

für $x \in C^1([a,b])$.

(a) Zeigen Sie, dass $\partial^2 I(x;\eta) = 2I(\eta)$ für alle zulässigen x und alle zulässigen Variationen η.

Lösung: Es gilt

$$f(t,x,\dot{x}) = \begin{pmatrix} x & \dot{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q(t) & R(t)\\ R(t) & P(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ \dot{x}\end{pmatrix},$$

also ist die Hesse-Matrix $H(t,x,\dot{x})$ der Abbildung $f(t,\cdot,\cdot)$ an der Stelle $(x,\dot{x})$ gegeben durch

$$H(t,x,\dot{x}) = 2\begin{pmatrix} Q(t) & R(t)\\ R(t) & P(t)\end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass die Hessematrix $H(t)$ hier nicht von der Stelle $(x,\dot{x})$ abhängt. Somit gilt für jedes zulässige x und jede zulässige Variation η, dass

$$\begin{aligned}
\partial^2 I(x;\eta) &= \int_a^b \big(\eta(t)\,,\ \dot{\eta}(t)\big)\ 2H(t,x(t),\dot{x}(t))\ \begin{pmatrix}\eta(t)\\ \dot{\eta}(t)\end{pmatrix}\mathrm{d}t =\\
&= \int_a^b \big(\eta(t)\,,\ \dot{\eta}(t)\big)\ 2\begin{pmatrix} Q(t) & R(t)\\ R(t) & P(t)\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}\eta(t)\\ \dot{\eta}(t)\end{pmatrix}\mathrm{d}t = 2\int_a^b f(t,\eta(t),\dot{\eta}(t))\,\mathrm{d}t = 2I(\eta).
\end{aligned}$$

(b) Folgern Sie: Falls $\overline{x}$ ein globales Minimum von $(*)$ ist, so gilt $I(\overline{x}) = 0$.

Lösung: Wenn $\overline{x}$ ein globales Minimum von $(*)$ ist, dann ist $\overline{x}$ insbesondere eine schwache lokale Lösung von $(*)$. Nach Vorlesung folgt dann $\partial^2 I(\overline{x};\eta) \ge 0$ für jede zulässige Variation η und nach Teilaufgabe (a) ist folglich

$$I(\eta) = \frac{1}{2}\partial^2 I(\overline{x};\eta) \ge 0$$

für jede zulässige Variation η. Nun ist aber jedes zulässige x, dass die vorgegebenen Randbedingungen $x(a) = x(b) = 0$ erfüllt, auch selbst eine zulässige Variation. Somit ist $I(x) \ge 0$ für jedes zulässige x, welches die Randbedingungen erfüllt.

Zuletzt bemerken wir, dass $\hat{x} = 0$ eine zulässige Funktion ist und die Randbedingugen erfüllt. Es gilt $I(\hat{x}) = 0$. Also ist $\hat{x} = 0$ ein globales Minimum für $(*)$, und weil auch $\overline{x}$ ein globales Minimum von $(*)$ ist, folgt $I(\overline{x}) = I(\hat{x}) = 0$.