Universität Ulm

Abgabe: Montag, 06.05.2013

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2013

Lösungen Einführung in die Variationsrechnung II: Blatt 2

4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, seien $p, q : I \to \mathbb{R}$ stetig und $p(t) > 0$ für alle $t \in I$. Betrachten Sie für $t_0 \in I$ die beiden Anfangwertprobleme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\dot{x}) = qx, \qquad x(t_0) = x_0 \neq 0, \quad \dot{x}(t_0) = v_0, \tag{1}$$

$$\dot{\omega} = -\frac{\omega^2}{p} + q, \qquad \omega(t_0) = \omega_0 := \frac{p(t_0)v_0}{x_0}. \tag{2}$$

Wir wollen den Zusammenhang zwischen den Nullstellen der Lösung von (1) und dem Verhalten der Lösung von (2) untersuchen.

(a) Sei $x : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (1) und $J \subset I$ eine offenes Intervall, das t_0 enthält, und auf dem x keine Nullstellen hat. Zeigen Sie: Dann ist $\omega := \frac{p\dot{x}}{x}$ auf J eine Lösung von (2).

Lösung: Unter den gegebenen Voraussetzungen erfüllt ω offenbar die Anfangsbedingung $\omega(t_0) = \omega_0$. Außerdem rechnen wir sofort nach, dass

$$\dot{\omega} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{p\dot{x}}{x} = \frac{x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\dot{x}) - p\dot{x}^2}{x^2} = \frac{qx^2 - p\dot{x}^2}{x^2} = q - \frac{1}{p}\frac{p^2\dot{x}^2}{x^2} = q - \frac{\omega^2}{p}.$$

(b) Sei ω eine Lösung von (2) auf einem offenen Intervall $J \subset I$, welches t_0 enthält. Sei weiterhin $x : J \to \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = \frac{\omega}{p}x, \qquad x(t_0) = x_0.$$

Zeigen Sie, dass x auf J keine Nullstellen besitzt und dass x auf J eine Lösung von (1) ist.

Lösung: Für $t \in J$ sei $F(t) := \int_{t_0}^{t} \frac{\omega(s)}{p(s)}\,\mathrm{d}s$. Dann ist die Lösung des Anfangwertproblems

$$\dot{x} = \frac{\omega}{p}x, \qquad x(t_0) = x_0.$$

offenbar durch $x(t) = \exp(F(t))x_0$ (für $t \in J$) gegeben (man beachte, dass die Lösung nach dem Satz von Picard-Lindelöf eindeutig ist). Wegen $x_0 \neq 0$ hat $x(t)$ keine Nullstellen. Außerdem ist x eine Lösung des Anfangswertproblems (1), denn es gilt $x(t_0) = \exp(0)x_0 = x_0$, $\dot{x}(t_0) = \frac{\omega(t_0)}{p(t_0)}x(t_0) = v_0$ und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\dot{x}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\frac{\omega}{p}x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega x) = \dot{\omega}x + \omega\dot{x} = (-\frac{\omega^2}{p} + q)x + \omega\frac{\omega}{p}x = qx.$$

(c) Wie in Teilaufgabe (a) sei $x : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung von (1) und $J \subset I$ ein offenes Intervall, das t_0 enthält, und auf dem x keine Nullstellen hat.
Außerdem sei nun $r \in I$ ein Randpunkt von J, sodass $x(r) = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{\substack{t \to r \\ t \in J}} |r - t|^{1+\varepsilon}\omega(t) = 0$$

Tipp: Zeigen Sie zuerst, dass es keine Folge $(t_n) \subset J$ mit $t_n \to r$ und $\limsup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|x(t_n)|}{|r-t_n|^{1+\varepsilon}} < \infty$ geben kann, weil ansonsten $\dot{x}(r) = 0$ gelten müsste.

Lösung: Sei $\varepsilon > 0$. Angenommen, es gäbe eine Folge $J \ni t_n \to r$ und ein $M \geq 0$ mit $\frac{|x(t_n)|}{|r-t_n|^{1+\varepsilon}} \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann würde

$$|\dot{x}(r)| = |\lim_{n\to\infty} \frac{0 - x(t_n)}{r - t_n}| \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|x(t_n)|}{|r - t_n|} \leq \limsup_{n\to\infty} M|r - t_n|^{\varepsilon} = 0$$

gelten. Damit wäre aber x auf I eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\dot{x}) = qx, \qquad x(r) = 0, \quad \dot{x}(r) = 0.$$

Weil dieses AWP auf I nur eine Lösung besitzt, würde $x = 0$ auf ganz I folgen; dies widerspricht aber $x(t_0) \neq 0$.

Also ist $\frac{|x(t_n)|}{|r-t_n|^{1+\varepsilon}}$ für jedes Folge $J \ni t_n \to r$ unbeschränkt. Damit folgt

$$\lim_{\substack{t\to r\\ t\in J}} \frac{|x(t)|}{|r-t|^{1+\varepsilon}} = \infty, \quad \text{also} \quad \lim_{\substack{t\to r\\ t\in J}} \frac{|r-t|^{1+\varepsilon}}{|x(t)|} = 0.$$

Aus Teilaufgabe (a) wissen wir, dass $\omega = \frac{p\dot{x}}{x}$ auf J eine Lösung des AWPs (2) ist, und mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf sieht man, dass dies die einzige Lösung ist. Weil p und $\dot{x}$ auf einer Umgebung von r beschränkt sind, folgt für $t \in J$

$$|r-t|^{1+\varepsilon}|\omega(t)| = |p(t)\dot{x}(t)|\frac{|r-t|^{1+\varepsilon}}{|x(t)|} \to 0 \quad (t \to r).$$

5. Wir betrachten diesselben Voraussetzungen wie in Aufgabe 4, nun aber im Spezialfall $I = \mathbb{R}$, $t_0 = 0$ und $v_0 = 0$. Zudem seien $q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $p > 0$ konstant (d.h. die Anfangswertprobleme (1) und (2) sind autonom).

(a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems (1). Welche unterschiedlichen Fälle ergeben sich in Abhängigkeit des Vorzeichens von $\frac{q}{p}$? Diskutieren Sie die Nullstellen der Lösung!

Lösung: Sei $\lambda = \left|\frac{q}{p}\right|^{\frac{1}{2}}$. Für $\frac{q}{p} > 0$ ist die Lösung von (1) durch $x(t) = \frac{1}{2}(\exp(\lambda t) + \exp(-\lambda t))x_0 = \cosh(\lambda t)x_0$ gegeben; es hat x in diesem Fall keine Nullstellen. Für $\frac{q}{p} < 0$ ist die Lösung durch $\cos(\lambda t)x_0$ gegeben; die Nullstellenmenge von x ist in diesem Fall gleich $(\mathbb{Z} + \frac{1}{2})\pi$.

(b) Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems (2) durch Trennung der Variablen! Achten Sie beim Lösen wieder auf das Vorzeichen von $\frac{q}{p}$!

Lösung: Wir betrachten zuerst den Fall $\frac{q}{p} > 0$. An allen Stellen, an denen die rechte Seite nicht Null ist, können wir die Riccati-Differentialgleichung aus (2) umschreiben in

$$\frac{\dot{\omega}}{1 - (\frac{\omega}{\sqrt{pq}})^2} = q.$$

Partialbruchzerlegung und anschließende Integration liefern dann

$$\frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega(t)} \frac{1}{1-\frac{\omega}{\sqrt{pq}}} + \frac{1}{1+\frac{\omega}{\sqrt{pq}}}\,\mathrm{d}\omega = q(t-t_0).$$

Es ist $t_0 = 0$ und $\omega_0 = 0$. Nach Berechnung des Integrals erhalten wir

$$\frac{1}{2}\sqrt{pq}\log\left((1-\frac{\omega(t)}{\sqrt{pq}})^{-1}(1+\frac{\omega(t)}{\sqrt{pq}})\right) = qt.$$

Schließlich lösen wir die Gleichung nach $\omega(t)$ auf. Es folgt $\omega(t) = \sqrt{pq}\frac{\sinh(\lambda t)}{\cosh(\lambda t)}$, wobei wir wie zuvor $\lambda = |\frac{q}{p}|^{\frac{1}{2}}$ gesetzt haben. Man beachte aber, dass wir nun noch nachprüfen müssen, ob diese Lösung tatsächlich das AWP (2) erfüllt, denn wir haben bei unserer Rechnung vorausgesetzt, dass $1 - \frac{\omega^2}{pq}$ nicht Null ist. Man überzeugt sich aber leicht, dass unser Kandidat für ω tatsächlich (2) löst.

Für den Fall $\frac{q}{p} < 0$ gehen wir analog vor und erhalten aus der Differentialgleichung

$$\frac{\dot{\omega}}{1 + (\frac{\omega}{\sqrt{p|q|}})^2} = q$$

nach kurzer Rechnung, dass $\omega(t) = -\sqrt{p|q|}\tan(\lambda t)$ gilt. Diese Funktion ist auf dem maximalen Lösungsintervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ die Lösung von (2).

(c) Leiten Sie die Lösung von (2) nocheinmal her, aber diesmal aus der Lösung des Anfangswertproblems (1) mit Hilfe der Formel aus Aufgabe 4 (i).

Lösung: Für $\frac{q}{p} > 0$ hat x keine Nullstellen, also besitzt (2) auf ganz $\mathbb{R}$ die Lösung $\omega(t) = \frac{p\dot{x}(t)}{x(t)} = \sqrt{pq}\frac{\sinh(\lambda t)}{\cosh(\lambda t)}$.
Für $\frac{q}{p} < 0$ ist das maximale Interval $J \subset \mathbb{R}$, welches $t_0 = 0$ enthält, und auf dem x keine Nullstellen besitzt, durch $J = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gegeben. Auf J besitzt (2) die Lösung

$$\omega(t) = \frac{p\dot{x}(t)}{x(t)} = -\sqrt{p|q|}\frac{\sin(\lambda t)}{\cos(\lambda t)} = -\sqrt{p|q|}\tan(\lambda t).$$