Universität Ulm

Abgabe: Montag, 03.06.2013

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2013

Lösungen Einführung in die Variationsrechnung II: Blatt 5

8. Betrachten Sie das Variationsproblem

$$(*) \qquad I(x) = \int_0^1 (1-\dot{x}(t))^2 \,\mathrm{d}t, \quad x(0)=1, x(1)=0.$$

(a) Berechnen Sie die Lösung $\overline{x}(t)$ der Euler-Lagrange-Gleichung für $(*)$.

Lösung: Die Euler-Lagrange-Gleichung für $(*)$ ist durch

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-2(1-\dot{x}(t))) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad &\ddot{x}(t) = 0 \end{aligned}$$

gegeben und besitzt offenbar die Lösung $\overline{x}(t) = at + b$ für geeignete $a, b \in \mathbb{R}$. Aufgrund der Randbedingungen folgt $\overline{x}(t) = 1 - t$.

(b) Geben Sie die Funktionen $p(t)$ und $q(t)$ für die zu $\overline{x}(t)$ gehörige Jacobi-Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\dot{\eta}) = q\eta$ an.
Berechnen Sie die Lösung der Jacobi-Differentialgleichung explizit.

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} p(t) &= f_{\dot{x}\dot{x}}(t, \overline{x}(t), \dot{\overline{x}}(t)) = 2 \quad \text{und} \\ q(t) &= f_{xx}(t, \overline{x}(t), \dot{\overline{x}}(t)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_{x\dot{x}}(t, \overline{x}(t), \dot{\overline{x}}(t)) = 0. \end{aligned}$$

Also lautet die Jacobi-Differentialgleichung $2\ddot{\eta}(t) = 0$. Somit haben wir $\eta(t) = ct + d$ (für $c, d \in \mathbb{R}$). Die Hauptlösung ist offenbar durch $\eta(t) = \frac{1}{p(0)} t = \frac{1}{2} t$ gegeben.

(c) Berechnen Sie die Lösung der Jacobi-Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\dot{\eta}) = q\eta$ noch einmal, aber diesmal mit Hilfe von Satz 23'!

Lösung: Wir haben in Teilaufgabe (a) gesehen, dass die Lösungen der Euler-Lagrange-DGl durch $at + b$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$) gegeben sind. Wir ändern noch die Parametrisierung, um $\overline{x}(t)$ zu erhalten, wenn wir die beiden Parameter auf 0 setzen: Dazu setzen wir $g(t, \alpha, \beta) = (\alpha - 1)t + (\beta + 1)$; dann ist $g(\cdot, \alpha, \beta)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Euler-Lagrange-DGl; außerdem gilt $g(t, 0, 0) = \overline{x}(t)$.
Nun wollen wir Satz 23' auf die Lösungschar $g(\cdot, \alpha, \beta)$ anwenden. Die Voraussetzungen des Satzes sind erfüllt, denn es ist $g \in C_3(\mathbb{R}^3)$ und es gilt

$$\det \begin{pmatrix} g_\alpha & g_\beta \\ \dot{g}_\alpha & \dot{g}_\beta \end{pmatrix} (0,0,0) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Also bilden nach Satz 23' die beiden Funktionen $\eta_1 = g_\alpha(t, 0, 0) = t$ und $\eta_2 = g_\beta(t, 0, 0) = 1$ ein Fundamentalsystem der Jacobischen DGl. Also erhalten wir wieder $\eta(t) = ct + d$ als allgemeine Lösung und $\eta(t) = \frac{1}{2} t$ als Hauptlösung.

(d) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Jacobi-Legendre, dass die Lösung $\overline{x}(t)$ der Euler-Lagrange-Gleichung ein schwaches lokales Minimum des Variationsproblems $(*)$ ist.
Wie hätte man dies mit Hilfe eines Konvexitäts-Arguments auch ohne den Satz von Jacobi-Legendre sehen können?

Lösung: Offenbar besitzt die Hauptlösung der Jacobischen DGl keine Nullstellen in $(0, 1]$. Außerdem ist $p(t) = 2$ positiv für alle $t \in [0, 1]$. Also sind alle Voraussetzungen des Satzes von Jacobi-Legendre (Satz 24) erfüllt und es folgt, dass $\overline{x}(t)$ ein schwaches lokales Minimum des Variationsproblems $(*)$ ist.

In diesem Beispiel hätte man aber auch deutlich einfacher argumentieren können: Es ist nämlich die Abbbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, \dot{x}) \mapsto (1 - \dot{x})^2$ für jedes $t \in [0, 1]$ konvex. Somit muss die Lösung der Euler-Lagrangschen Differenitalgleichung automatisch ein globales Minimum für $(*)$ sein.

9. Betrachten Sie das Variationsproblem

$$(*) \qquad I(x) = \int_0^1 \frac{1}{3}\dot{x}(t)^3 - \dot{x}(t)^2 \,\mathrm{d}t, \quad x(0) = 0, x(1) = 2.$$

(a) Berechnen Sie die Lösung $\overline{x}(t)$ der Euler-Lagrange-Gleichung für $(*)$.

Lösung: Die Euler-Lagrange-Gleichung für $(*)$ lautet

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{x}(t)^2 - 2\dot{x}(t)) = 0$$

Durch Integration erhalten wir also $\dot{x}(t)^2 - 2\dot{x}(t) = c_1$ für ein $c_1 \in \mathbb{R}$. Weil diese quadratische Gleichung höchstens zwei Lösungen hat, kann $\dot{x}(t)$ also höchstens zwei Werte annehmen. Zugleich ist $\dot{x}(t)$ aber stetig, also muss $\dot{x}(t)$ konstant sein. Damit haben wir gezeigt, dass $\overline{x}(t) = at + b$ gilt (für geeignete $a, b \in \mathbb{R}$). Durch die Randbedingungen folgt $\overline{x}(t) = 2t$.

(b) Zeigen Sie, dass $p(t) = f_{\dot{x}\dot{x}}(t, \overline{x}(t), \dot{\overline{x}}(t))$ positiv ist (wobei $f(t, x, \dot{x}) = \frac{1}{3}\dot{x}^3 - \dot{x}^2$ ist). Berechnen Sie die Hauptlösung der Jacobi-Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p\dot{\eta}) = q\eta$.

Lösung: Es ist $p(t) = 2\dot{\overline{x}}(t) - 2 = 2 > 0$. Außerdem gilt wiederum $q(t) = 0$. Also haben wir die Jacobi-Differentialgleichung $2\ddot{\eta}(t) = 0$, welche die Hauptlösung $\eta(t) = \frac{1}{p(0)}t = \frac{1}{2}t$ besitzt.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Jacobi-Legendre, dass die Lösung $\overline{x}(t)$ der Euler-Lagrange-Gleichung ein schwaches lokales Minimum des Variationsproblems $(*)$ ist.
Könnte man hier ebenfalls ein Konvexitäts-Argument anstelle des Satzes von Jacobi-Legendre verwenden?

Lösung: Weil die Hauptlösung der Jacobi-Differentialgleichung keine Nullstellen im Intervall $(0, 1]$ besitzt und weil $p(t) > 0$ gilt, sind die Voraussetzungen von Satz 24 erfüllt. Es folgt also, dass $\overline{x}(t)$ ein schwaches lokales Minimum von $(*)$ ist.

In diesem Beispiel hätte man nicht ohne weiteres ein Konvexitäts-Argument verwenden können, denn die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, \dot{x}) \mapsto \frac{1}{3}\dot{x}^3 - \dot{x}^2$ ist nicht konvex.