Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2013

Lösungen Einführung in die Variationsrechnung II: Blatt 6

10. Sei $f(t,x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $x \in (-1,1)$ und $\dot{x} \in \mathbb{R}$.
Wir betrachten das Funktional

$$I(x) = \int_0^1 f(t,x,\dot{x})\,\mathrm{d}t.$$

(a) Leiten Sie die Beltramische partielle Differentialgleichung her!

Lösung: Die Beltramische DGl lautet

$$\begin{aligned} & f_x = f_{\dot{x}t} + f_{\dot{x}\dot{x}}(\Phi_t + \Phi\Phi_x) + f_{\dot{x}x}\Phi \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{(2-x)^2} - \frac{1}{(2+x)^2} = \Phi_t + \Phi\Phi_x. \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie: Für jedes $c \geq 0$ ist

$$\Phi(t,x) = \sqrt{\frac{2}{2-x} + \frac{2}{2+x} + c}$$

eine Lösung der Beltramischen partiellen Differentialgleichung.

Lösung: Für das angegebene Φ gilt:

$$\Phi_t(t,x) = 0 \quad \text{und} \quad \Phi_x(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\frac{2}{(2-x)^2} - \frac{2}{(2+x)^2}}{\sqrt{\frac{2}{2-x} + \frac{2}{2+x} + c}}.$$

Damit ist wie behauptet $\Phi_t(t,x) + \Phi(t,x)\Phi_x(t,x) = \frac{1}{(2-x)^2} - \frac{1}{(2+x)^2}$.

(c) Betrachten Sie nun den Spezialfall $c = 0$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Lösungen der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = \Phi(t, x(t))$ implizit durch

$$(*) \quad \arcsin(\frac{x(t)}{2}) + \frac{x(t)}{2}\sqrt{1 - (\frac{x(t)}{2})^2} - d = \sqrt{2}t$$

gegeben sind (mit der Konstanten $d = \arcsin(\frac{x(0)}{2}) + \frac{x(0)}{2}\sqrt{1-(\frac{x(0)}{2})^2}$).

Lösung: Wir lösen die DGl

$$\dot{x}(t) = \Phi(t,x) = \sqrt{\frac{2}{2-x} + \frac{2}{2+x}}$$

durch Trennung der Variablen. Dazu formen wir die DGl um zu

$$\begin{aligned} & \dot{x} = \sqrt{\frac{8}{4-x^2}} && \Leftrightarrow \quad \sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}\,\dot{x} = \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow\quad & \int_{x(0)}^{x(t)} \sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}t && \Leftrightarrow \quad 2\int_{\frac{x(0)}{2}}^{\frac{x(t)}{2}} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}t \\ \Leftrightarrow\quad & \arcsin(\frac{x(t)}{2}) + \frac{x(t)}{2}\sqrt{1-(\frac{x(t)}{2})^2} - d = \sqrt{2}t, \end{aligned}$$

wobei d wie in der Behauptung ist.

Als alternativen Lösungsweg kann man auch nachrechnen, dass eine Funktion $x(t)$, welche die Gleichung $(*)$ erfüllt, eine Lösung der DGl $\dot{x}(t) = \Phi(t, x(t))$ ist. Dazu leitet man die Gleichung $(*)$ nach t ab und erhält

$$\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}\frac{\dot{x}}{2} + \frac{\dot{x}}{2}\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2} + \frac{x}{2}\frac{-2\,\frac{x}{2}\,\frac{\dot{x}}{2}}{2\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} = \sqrt{2}$$

Wir formen die Gleichung um zu

$$\sqrt{2} = \frac{\dot{x}}{2}\,\frac{1+(1-(\frac{x}{2})^2)-(\frac{x}{2})^2}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} = \frac{\dot{x}}{2}\,\frac{2-2(\frac{x}{2})^2}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} = \dot{x}\,\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}.$$

Die ist äquivalent zu

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{1-(\frac{x}{2})^2}} = \sqrt{\frac{8}{4-x^2}} = \sqrt{\frac{2}{2-x}+\frac{2}{2+x}} = \Phi(t, x).$$

Also erfüllt x die Differentialgleichung $\dot{x} = \Phi(t, x)$. Dass die Konstante d wie in der Angabe gewählt werden muss, folgt, indem wir $t = 0$ in die Gleichung $(*)$ einsetzen.