Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2013

Lösungen Einführung in die Variationsrechnung II: Blatt 7

11. Sei $f(t,x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{x}$ für $t \in (0,\infty)$, $x \in (0,\infty)$ und $\dot{x} \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie das Funktional

$$I(x) = \int_1^2 f(t, x(t), \dot{x}(t))\, \mathrm{d}t.$$

(a) Leiten Sie die Euler-Lagrange-Differentialgleichung für das Funktional $I(x)$ her und zeigen Sie, dass $x(t) = (\frac{3}{\sqrt{2}}t + c)^{\frac{2}{3}}$ für $c \in (0,\infty)$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Differentialgleichung ist.

Lösung: Die Euler-Lagrange-DGl zu $I(x)$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_{\dot{x}}(t,x,\dot{x}) &= f_x(t,x,\dot{x}) \\ \Leftrightarrow \quad \ddot{x} &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Für die angebenene Funktion $x(t)$ berechnen wir

$$\ddot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{2}{3}\,\frac{3}{\sqrt{2}}\,(\frac{3}{\sqrt{2}}t + c)^{-\frac{1}{3}}\Big) = -\frac{2}{9}(\frac{3}{\sqrt{2}})^2(\frac{3}{\sqrt{2}}t + c)^{-\frac{4}{3}} = -x(t)^{-2}.$$

Also erfüllt $x(t)$ tatsächlich die Euler-Lagrange-DGl.

(b) Verwenden Sie das Lemma aus Kapitel 18 um mit Hilfe von Teilaufgabe (a) ein geodätisches Feld Φ für $I(x)$ herzuleiten.

Lösung: Es ist $\varphi : \mathcal{D} := (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$, $(t,c) \mapsto (\frac{3}{\sqrt{2}}t + c)^{\frac{2}{3}}$ eine einparametrige Lösungsschar der Euler-Lagrange-DGl (nach Teilaufgabe (a)). Außerdem ist $x = \varphi(t,c)$ für jedes t eindeutig nach c auflösbar, und es ist $c(t,x) = x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}t$ differenzierbar für $t, x \in (0,\infty)$.
Also können wir das Lemma aus Kapitel 18 anwenden und erhalten ein geordätisches Feld

$$\Phi(t,x) = \varphi_t(t, c(t,x)) = \sqrt{2}(\frac{3}{\sqrt{2}}t + c(t,x))^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

(c) Leiten Sie Beltrami-Differentialgleichung für $I(x)$ her und rechnen Sie explizit nach, dass das Feld Φ aus Teilaufgabe (b) tatsächlich die Beltrami-Differentialgleichung löst.

Lösung: Die Beltrami-DGl

$$f_x = f_{\dot{x}t} + f_{\dot{x}\dot{x}}(\Phi_t + \Phi\Phi_x) + f_{\dot{x}x}\Phi$$

lautet für unser Funktional $I(x)$

$$-\frac{1}{x^2} = \Phi_t + \Phi\Phi_x.$$

Wir wollen in diesem Beispiel noch einmal explizit nachrechnen, dass das Feld $\Phi(t,x) = \sqrt{2}x^{-\frac{1}{2}}$ tatsächlich die Beltrami-DGl erfüllt (obwohl wir aus dem Lemma in Kapitel 18 bereits wissen, dass die der Fall sein muss): Es gilt

$$\Phi_t(t,x) = 0 \quad \text{und} \quad \Phi_x(t,x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

und somit

$$\Phi_t(t,x) + \Phi(t,x)\Phi_x(t,x) = \sqrt{2}x^{-\frac{1}{2}} \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}x^{-\frac{3}{2}}) = -x^{-2},$$

also erfüllt $\Phi(t,x) = \sqrt{2}x^{-\frac{1}{2}}$ die Beltramische DGl.

(d) Rechnen Sie außerdem explizit nach, dass die Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung aus Teilaufgabe (a) tatsächlich die Differentialgleichung $\dot{x} = \Phi(t, x)$ erfüllt.

Lösung: Es gilt einerseits

$$\dot{x}(t) = \sqrt{2}(\frac{3}{\sqrt{2}}t + c)^{-\frac{1}{3}}$$

und andererseits

$$\Phi(t, x) = \sqrt{2}x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\big((\frac{3}{\sqrt{2}}t + c)^{\frac{2}{3}}\big)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}(\frac{3}{\sqrt{2}}t + c)^{-\frac{1}{3}}.$$

Also haben wir in diesem Beispiel noch einmal explizit nachgerechnet, was wir aus der Theorie in der Vorlesung bereits wussten: Es erfüllt x die DGl $\dot{x} = \Phi(t, x)$.