Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2013

Lösungen Einführung in die Variationsrechnung II: Blatt 8

12. Betrachten Sie das folgende Variationsproblem:

$$I(x) = \int_0^1 \dot{x}(t)^2 - x(t)^2 - 2tx(t)\,\mathrm{d}t = \min\,, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Sei $\varphi_1(t) = t(1-t)$, $\varphi_2(t) = t^2(1-t)$ und sei $\Phi_2 := \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$ die lineare Hülle von φ_1 und φ_2.

(a) Minimieren Sie das Funktional I über dem Raum Φ_2, d.h. finden Sie diejenigen Koeffizienten $\overline{c}_1, \overline{c}_2 \in \mathbb{R}$, für die $I(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)$ minimal ist.

Lösung: Eine beliebige Funktion $\varphi \in \Phi_2$ können wir schreiben als

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c2\varphi_2 \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Damit ist

$$\dot{\varphi}(t) = c_1(1-2t) + c_2(2t - 3t^2).$$

Wir können nun φ in das Funktional I einsetzen und erhalten

$$I(\varphi) = \int_0^1 [c_1(1-2t) + c_2(2t-3t^2)]^2 - [c_1 t(1-t) + c_2 t^2(1-t)]^2 - 2t[c_1 t(1-t) + c_2 t^2(1-t)]\,\mathrm{d}t.$$

Daraus berechnet man

$$I(\varphi) = \frac{3}{10}c_1^2 + \frac{3}{10}c_1c_2 + \frac{13}{105}c_2^2 - \frac{1}{6}c_1 - \frac{1}{10}c_2.$$

Der Gradient dieses Werts nach (c_1, c_2) ist durch

$$\nabla I(\varphi) = \left(\tfrac{6}{10}c_1 + \tfrac{3}{10}c_2 - \tfrac{1}{6}, \quad \tfrac{3}{10}c_1 + \tfrac{26}{105}c_2 - \tfrac{1}{10}\right)$$

gegeben. Wir setzen den Gradienten gleich 0 und erhalten nach Lösung des linearen Gleichungssystems:

$$\overline{c}_1 = \frac{71}{369}, \quad \overline{c}_2 = \frac{7}{41}.$$

Unsere Funktion φ ist somit durch

$$\varphi(t) = \overline{c}_1\varphi_1(t) + \overline{c}_2\varphi_2(t) = \frac{71}{369}t - \frac{8}{369}t^2 - \frac{7}{41}t^3$$

gegeben.

(b) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für das Funktional I und berechnen Sie die Lösung $\overline{x}$ der Euler-Lagrange-Gleichung für die angegebenen Randbedingungen.

Lösung: Die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) = f_x(t, x, \dot{x})$$

ist in unserem Beispiel durch

$$\ddot{x} = -x - t$$

gegeben.

Die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems $\ddot{x} = -x$ hat offenbar die Form $x_h(t) = a_1 \sin(t) + a_2 \cos(t)$ (mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$).

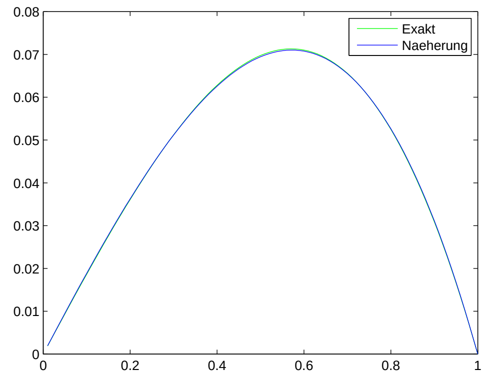
Als eine Lösung des inhomogenen Systems errät man leicht die Funktion $x_p(t) = -t$. Also ist die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems durch $a_1 \sin(t) + a_2 \cos(t) - t$ gegeben. Mit Hilfe der Randbedingungen $x(0) = x(1) = 0$ folgt sofort $a_2 = 0$ und $a_1 = \frac{1}{\sin(1)}$.

Somit lautet die Lösung der Lagrange-Gleichung zu den gegebenen Randbedingungen:

$$\overline{x}(t) = \frac{\sin(t)}{\sin(1)} - t.$$

(c) Vergleichen Sie die exakte Lösung $\overline{x}$, die Sie in Teilaufgabe (b) berechnet haben, mit der Näherungslösung $\overline{c}_1\varphi_1 + \overline{c}_2\varphi_2$, die Sie in Teilaufgabe (a) berechnet haben (beispielsweise, indem Sie die beiden Funktionen am Computer plotten).

Lösung: Die exakte Loesung und die Näherungslösung sehen auf dem Intervall $[0, 1]$ folgendermaßen aus:



Bei der verwendeten Skalierung ist der Unterschied zwischen der exakten und der Näherungslösung kaum zu erkennen. Wir plotten außerdem noch den absoluten und den relativen Fehler: