Universität Ulm

Abgabe: Montag, 29.04.2013

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2013

Übungen Einführung in die Variationsrechnung II: Blatt 1

1. Sei $G \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und

$$I(x) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t$$

für zulässige Funktionen $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $x \in \mathcal{R}$.

Zeigen Sie: Wenn $f(t, \cdot, \cdot)$ für jedes feste $t \in [a, b]$ konvex ist, dann gilt für jedes zulässige $x \in \mathcal{R}$ und jede zulässige Variation η, dass $\partial^2 I(x; \eta) \geq 0$.

2. Sei $k > 0$, $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wir setzen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(t, x, \dot{x}) = \cos(kx - \omega t)\dot{x}$. Zudem sei $x_b \in \mathbb{R}$. Wir suchen eine einmal stetig differenzierbare Funktion $x : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, welche das Variationsproblem

$$I(x) = \int_0^{2\pi} f(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t = \min\,, \quad x(0) = 0,\, x(2\pi) = x_b$$

löst.

(a) Leiten Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für das Variationsproblem her und finden Sie heraus, für welche rechten Randwerte x_b die Euler-Lagrange-Gleichung eine Lösung besitzt.
Bestimmen sie die Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung für diejenigen x_b, für die sie existiert.

(b) Sei nun x_b derart, dass die Euler-Lagrange-Gleichung eine Lösung $\overline{x}$ besitzt. Sei η eine zulässige Variation. Berechnen Sie die zweite Variation $\partial^2 I(\overline{x}; \eta)$.
Diskutieren sie das Vorzeichen der zweiten Variation in Abhängigkeit von der Größe $v := \frac{\omega}{k}$.

3. Seien $P, Q, R : [a, b] \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig und $P(t), Q(t), R(t)$ symmetrisch für alle $t \in [a, b]$. Wir setzen $f : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}$, $f(t, x, \dot{x}) = x^T Q(t) x + 2x^T R(t)\dot{x} + \dot{x}^T P(t)\dot{x}$ und betrachten das Minimierungsproblem

$$(*) \qquad I(x) = \int_a^b f(t, x(t), \dot{x}(t))\,\mathrm{d}t = \min\,, \quad x(a) = 0,\, x(b) = 0$$

für $x \in C^1([a, b])$.

(a) Zeigen Sie, dass $\partial^2 I(x; \eta) = 2I(\eta)$ für alle zulässigen x und alle zulässigen Variationen η.

(b) Folgern Sie: Falls $\overline{x}$ ein globales Minimum von $(*)$ ist, so gilt $I(\overline{x}) = 0$.