Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 11.04.2016

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2016
Punktzahl: 9

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 4

9. Sei $E = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass die Menge aller nirgends differenzierbaren Funktionen in E dicht liegt.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei (4)

$$A_n := \{f \in E |\; \exists t \in [0,1]\, \forall h \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 < |h| < \frac{1}{n} \text{ und } t+h \in [0,1] : \frac{|f(t+h) - f(t)|}{|h|} \leq n\}$$

und $U_n \coloneqq E \setminus A_n$. Zeigen Sie, dass A_n abgeschlossen ist und U_n dicht in E liegt.

(b) Zeigen Sie: Die Menge $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ liegt dicht in E und jede Funktion aus dieser Menge ist nirgends differenzierbar. (2)

Für die nächste Aufgabe benötigen wir zwei Begriffe aus der linearen Algebra, die wir hier wiederholen:

Wiederholung. Sei E ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$.

(a) Eine lineare Abbildung $P : E \to E$ heißt *Projektion*, falls $P^2 = P$ gilt.

(b) Seien $F_1, ..., F_n \subseteq E$ Untervektorräume. Wir sagen, dass E die *direkte Summe* von $F_1, ..., F_n$ ist, falls es für jedes $v \in E$ genau ein Tupel $(v_1, ..., v_n) \in F_1 \times ... \times F_n$ mit der Eigenschaft $v = v_1 + ... + v_n$ gibt.

In der linearen Algebra zeigt man, dass E genau dann die direkte Summe von $F_1, ..., F_n$ ist, wenn die Menge $F_1 + ... + F_n \coloneqq \{v_1 + ... + v_n |\, v_1 \in F_1, ..., v_n \in F_n\}$ gleich E ist und die Untervektorräume $F_1, ..., F_n$ sich paarweise in $\{0\}$ schneiden.

10. Sei E ein normierter Raum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und sei E die direkte Summe von Untervektorräumen $F_1, ..., F_n \subseteq E$.

(a) Für jedes $v \in E$ sei $(P_1 v, ..., P_n v) \in F_1 \times ... \times F_n$ dasjenige Tupel, für welches $v = P_1 v + ... + P_n v$ gilt. Zeigen Sie: Für jedes $k \in \{1, ..., n\}$ ist die Abbildung $P_k : E \to E$, $v \to P_k v$ eine lineare Projektion mit Bild F_k. (2)

(b) Zeigen Sie: Wenn für ein $k \in \{1, ..., n\}$ die Projektion P_k stetig ist, dann ist F_k abgeschlossen. (1)

Zusatzinformation: Mit Hilfe des Satzes von Baire kann man den sehr wichtigen „Satz von der stetigen Inversen“ beweisen, siehe z.B. [W. Kaballo, Grundkurs Funktionalanalysis (2011), Satz 8.8]. Aus diesem Satz kann man leicht die folgende Aussage folgern:

Ist E vollständig und sind alle Untervektorräume $F_1, ..., F_n$ abgeschlossen, so ist jede der Projektionen $P_1, ..., P_n$ stetig.

Man beachte hierbei jedoch: Wenn nur *manche* der Untervektorräume $F_1, ..., F_n$ abgeschlossen sind, so folgt daraus im Allgemeinen nicht, dass die zugehörigen Projektionen stetig sind.