Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 18.04.2016

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2016
Punktzahl: 11

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 5

11. Sei $p \in [1, \infty)$, sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $E = L^p(\Omega, \Sigma, \mu; \mathbb{R})$. Es gelte zudem $\dim E \geq 2$.

(a) Seien $[f], [g] \in E$ zwei Vektoren mit folgender Eigenschaft: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ fast überall ≥ 0 oder fast überall ≤ 0. Zeigen Sie, dass $[f]$ und $[g]$ dann linear abhängig sind. (2)

(b) Folgern Sie aus (a), dass es zwei disjunkte messbare Mengen $A, B \subseteq \Omega$ mit der Eigenschaft $0 < \mu(A), \mu(B) < \infty$ gibt. (1)

(c) Zeigen Sie: E ist genau dann ein Hilbertraum (d.h. genauer: die Norm auf E wird von einem Skalarprodukt induziert), wenn $p = 2$ gilt. (2)

12. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, Borel-messbare Menge. Es bezeichne $\mathcal{B}$ die Borel-σ-Algebra auf Ω und $\lambda : \mathcal{B} \to [0, \infty)$ das Lebesgue-Maß. Zudem sei $E = L^p(\Omega, \mathcal{B}, \lambda; \mathbb{R})$ für ein $p \in [1, \infty)$. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass die Menge

$$\mathcal{C}_\mathrm{b} := \{[f] | \; f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ ist stetig und beschränkt}\}$$

dicht in E liegt.

(a) Sei B eine offene Kugel im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass der Vektor $[\mathbb{1}_{B\cap\Omega}] \in E$ im $\|\cdot\|_p$-Abschluss von $\mathcal{C}_\mathrm{b}$ liegt. (2)

(b) Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller $A \in \mathcal{B}$ mit der Eigenschaft, dass der Vektor $[\mathbb{1}_A] \in E$ im $\|\cdot\|_p$-Abschluss von $\mathcal{C}_\mathrm{b}$ liegt. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω ist. (3)

(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}_\mathrm{b}$ dicht in E liegt. (1)