Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Sommersemester 2016
Punktzahl: 14

Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 15.06.2016

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 9

20. Sei H ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(H)$ ein selbst-adjungierter Operator. Zudem gebe es eine Konstante $c > 0$ derart, dass für alle $x \in H$ die Abschätzung $\langle x, Ax\rangle \geq c\|x\|^2$ gilt. Zeigen Sie, dass A bijektiv ist. (4)

Tipp für die Surjektivität: Setzen Sie $\langle x, y\rangle_A = \langle x, Ay\rangle$ für alle $x, y \in H$. Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ ebenfalls ein Skalarprodukt auf H ist, und dass die von diesem Skalarprodukt induzierte Norm $\|\cdot\|_A$ die Abschätzung $\sqrt{c}\|x\| \leq \|x\|_A \leq \sqrt{\|A\|}\|x\|$ für alle $x \in H$ erfüllt.

Definition. Seien E, F zwei normierte Vektorräume und sei H ein Hilbertraum.

(a) Eine lineare Abbildung $T : E \to F$ heißt *isometrisch*, wenn $\|Tx\| = \|x\|$ für alle $x \in E$ gilt.

(b) Ein Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ heißt *normal*, wenn er mit seiner Adjungierten kommutiert, d.h. wenn $TT^* = T^*T$ gilt.

(c) Ein Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ heißt *unitär*, wenn $TT^* = T^*T = \mathrm{id}_H$ gilt.

21. Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und sei $T \in \mathcal{L}(H)$.

(a) Zeigen Sie: Es gilt $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ für alle $x, y \in H$. (1)

(b) Zeigen Sie: Ist T ist genau dann isometrisch, wenn $T^*T = \mathrm{id}_H$ gilt. (2)

(c) Für diese Teilaufgabe sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $H := \ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{C})$. Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ der sogenannte *Rechts-Shift*, d.h. es gelte $T(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$ für alle $x = (x_1, x_2, ...) \in H$. (2)
Zeigen Sie, dass T isometrisch ist. Berechnen Sie außerdem den adjungierten Operator T^* und zeigen Sie, dass nicht $TT^* = \mathrm{id}_H$ gilt (d.h. T ist nicht unitär).

(d) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind: (4)

- (i) T ist unitär.
- (ii) T^* ist unitär.
- (iii) T ist isometrisch und bijektiv.
- (iv) T ist isometrisch und normal.
- (v) T und T^* sind beide isometrisch.

(e) Offensichtlich sind alle selbst-adjungierten und alle unitären Operatoren normal. Geben Sie ein Beispiel für einen Hilbertraum H und einen Operator $T \in \mathcal{L}(H)$ an derart, dass T weder selbstadjungiert noch unitär, aber trotzdem normal ist. (1)