Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 13

28. Sei H ein reeller oder komplexer Hilbertraum und sei $T \in \mathcal{L}(H)$. Sei V ein abgeschlossener Untervektorraum von H (und somit selbst ein Hilbertraum bezüglich des von H induzierten Skalarprodukts), der invariant unter T und T^* ist, d.h. es gelte $TV \subseteq V$ und $T^*V \subseteq V$. Mit $T|_V \in \mathcal{L}(V)$ und $T^*|_V \in \mathcal{L}(V)$ bezeichnen wir die Einschränkungen von T und T^* auf V.

(a) Zeigen Sie: Es gilt $(T|_V)^* = (T^*)|_V$.

(b) Folgern Sie: Ist T normal, so ist auch $T|_V$ normal.

29. Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei $T \in \mathcal{L}(H)$ ein normaler Operator.

(a) Zeigen Sie: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von T mit Eigenvektor $x \in H$, so ist $\overline{\lambda}$ ein Eigenwert von T^* mit Eigenvektor x.

(b) Zeigen Sie: Sind $x_1, x_2 \in H$ Eigenvektoren von T zu zwei verschiedenen Eigenwerten, so stehen x_1 and x_2 senkrecht aufeinander.

(c) Zeigen Sie: Ist T kompakt und $H \neq \{0\}$, so besitzt T einen Eigenwert.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die folgende Aussage benutzen: Besteht das Spektrum eines normalen Operators nur aus der 0*, so handelt es sich bei diesem Operator bereits um den Null-Operator.*

30. Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei $T \in \mathcal{L}(H)$ normal und kompakt. Es sei $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller Eigenwerte von T (mit $\lambda_n \neq \lambda_m$ für $n \neq m$). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei E_n eine Orthonormalbasis des Eigenraumes $\ker(\lambda_n \operatorname{id}_H - T)$ von T und wir setzen $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$.

(a) Zeigen Sie: E ist ein Orthonormalsystem in H.

(b) Zeigen Sie: E ist sogar eine Orthonormalbasis von H.
Tipp: Zeigen Sie, dass $V := E^\perp$ *invariant unter* T *und* T^* *ist.*

Bemerkung: In Aufgabe 30(b) haben wir das folgende wichtige Theorem bewiesen:

Theorem (Spektralsatz für kompakte normale Operatoren)**.** *Sei H ein komplexer Hilbertraum und sei $T \in \mathcal{L}(H)$ kompakt und normal. Dann besitzt H eine Orthonormalbasis, die aus Eigenvektoren von T besteht.*

Da jeder selbst-adjungierte Operator normal ist, gilt dieser Satz insbesondere für kompakte selbst-adjungierte Operatoren. Mit fast demselben Beweis wie oben kann man zudem zeigen, dass der Satz für selbst-adjungierte Operatoren auch dann stimmt, wenn der Skalarkörper reell ist, d.h. man erhält:

Theorem (Spektralsatz für kompakte selbst-adjungierte Operatoren)**.** *Sei H ein reeller oder komplexer Hilbertraum und sei $T \in \mathcal{L}(H)$ kompakt und selbst-adjungiert. Dann besitzt H eine Orthonormalbasis, die aus Eigenvektoren von T besteht.*