Universität Ulm

Abgabe: -

Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 0

Lösungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 0

1. Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ ein Operator auf X, $X \times X$ mit der Norm $||(x, y)||_1 = ||x|| + ||y||$ versehen und sei $G(A) := \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times X$ der Graph von A. Zeigen Sie:

(a) Es definiert $||x||_A := ||x|| + ||Ax||$ eine Norm auf $D(A)$.

Lösung: Positive Definitheit: Für jedes $x \in D(A)$ gilt $||x||_A = ||x|| + ||Ax|| \geq 0$. Ist sogar $||x||_A = 0$, so folgt insbesondere $||x|| = 0$ und somit $x = 0$.
Homogenität: Für $x \in D(A)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ist

$$||\lambda x||_A = ||\lambda x|| + ||A\lambda x|| = |\lambda|\,||x|| + |\lambda|\,||Ax|| = |\lambda|\,||x||_A.$$

Dreiecks-Ungleichung: Für $x, y \in D(A)$ gilt

$$||x + y||_A = ||x + y|| + ||A(x + y)|| \leq ||x|| + ||y|| + ||Ax|| + ||Ay|| = ||x||_A + ||y||_A.$$

(b) Die Abbildung $(D(A), ||A||) \to (G(A), ||\cdot||_1)$, $x \mapsto (x, Ax)$ ist linear, bijektiv und isometrisch (also insbesondere stetig).

Lösung: Linearität und Injektivität sind klar. Die Surjektivität folgt sofort aus der Definition des Graphen $G(A)$. Isometrisch ist die Abbildung nach Definition von $||\cdot||_A$, denn für jedes $x \in D(A)$ ist

$$||x||_A = ||x|| + ||Ax|| = ||(x, Ax)||_1.$$

(c) Es ist A genau dann abgeschlossen, wenn $D(A)$ ein Banachraum bezüglich $||\cdot||_A$ ist.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned} &A \text{ ist abgeschlossen} \quad \Leftrightarrow \quad G(A) \subset X \times X \text{ist abgeschlossen} \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad &(G(A), ||\cdot||_1) \text{ ist ein Banachraum} \quad \overset{(b)}{\Leftrightarrow} \quad (D(A), ||\cdot||_A) \text{ ist ein Banachraum.} \end{aligned}$$

2. Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator und sei $\mu \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Wenn $\mu - A : D(A) \to X$ bijektiv ist, dann ist bereits $\mu \in \rho(A)$.

Lösung: Sei $\mu - A$ bijektiv. Wir müssen zeigen, dass $(\mu - A)^{-1}$ stetig ist. Da $(\mu - A)^{-1}$ auf ganz X definiert ist, genügt es nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen zu zeigen, dass $(\mu - A)^{-1}$ abgeschlossen ist.

Dazu betrachten wir die Abbildung $S : X \times X \to X \times X$, $(x, y) \mapsto (y, x)$. Es gilt

$$G((\mu - A)^{-1}) = \{(y, (\mu - A)^{-1}y) : y \in X\} = \{((\mu - A)x, x) : x \in D(A)\} = S(G(\mu - A)).$$

Weil $\mu - A$ abgeschlossen ist und S isometrisch ist, ist auch $G((\mu - A)^{-1})$ abgeschlossen.

3. Sei $X = C([0, 1])$, $D(A) = C^1([0, 1])$ und $A : D(A) \to X$, $f \mapsto f'$. Zeigen Sie:

(a) A ist abgeschlossen.

Lösung: Die Behauptung ist nur eine Umformulierung eines bekannten Resultats aus der Analysis: Sei $(f_n) \subset C^1([0, 1])$ eine Folge, die gleichmäßig gegen eine stetige Funktion f konvergiert und sei außerdem f_n' gleichmäßig konvergent gegen eine stetige Funktion g. Dann weiß man aus der Analysis, dass $f \in C^1([0, 1])$ ist und $f' = g$ gilt. Also ist A abgeschlossen.
Man beachte: Eigentlich gilt sogar ein etwas stärkerer Satz, vgl. ein beliebiges Analysis-Buch.

(b) Der Raum $C^1([0, 1])$ ist ein Banachraum bezüglich der Norm $||f||_A := ||f||_\infty + ||f'||_\infty$.

Lösung: Das folgt unmittelbar aus Teilaufgabe (a) und Aufgabe 1 (c).

4. Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator auf X. Man zeige:

(a) Für jedes $\mu \in \rho(A)$ und jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \mu| < \frac{1}{||\mathrm{R}(\mu,A)||}$ gilt auch $\lambda \in \rho(A)$ und

$$\mathrm{R}(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n \, \mathrm{R}(\mu, A)^{n+1}.$$

Es gilt $\operatorname{dist}(\mu, \sigma(A)) \geq \frac{1}{||\mathrm{R}(\mu,A)||}$.

Lösung: Sei $\mu \in \rho(A)$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \mu| < \frac{1}{||\mathrm{R}(\mu,A)||}$. Wir berechnen zunächst:

$$\lambda - A = \mu - A + \lambda - \mu = (I - (\mu - \lambda)\,\mathrm{R}(\mu, A))(\mu - A).$$

Nach Voraussetzung gilt $||(\mu - \lambda)\,\mathrm{R}(\mu, A)|| < 1$, also ist der Operator $I - (\mu - \lambda)\,\mathrm{R}(\mu, A)$ invertierbar und seine Inverse ist durch die Neumann-Reihe gegeben:

$$(I - (\mu - \lambda)\,\mathrm{R}(\mu, A))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n \, \mathrm{R}(\mu, A)^n.$$

Weil $(\mu - A)$ invertierbar ist, ist also auch $\lambda - A = (I - (\mu - \lambda)\,\mathrm{R}(\mu, A))(\mu - A)$ invertierbar; also ist $\lambda \in \rho(A)$. Es gilt

$$(\lambda - A)^{-1} = (\mu - A)^{-1}(I - (\mu - \lambda)\,\mathrm{R}(\mu, A))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n \, \mathrm{R}(\mu, A)^{n+1}.$$

Aus dem bereits Gezeigten folgt auch die Abschätzung $\operatorname{dist}(\mu, \sigma(A)) \geq \frac{1}{||\mathrm{R}(\mu,A)||}$: Ist nämlich $\lambda \in \sigma(A)$, so muss $|\lambda - \mu| \geq \frac{1}{||\mathrm{R}(\mu,A)||}$ gelten.

(b) Die Resolventenmenge $\rho(A)$ ist offen und das Spektrum $\sigma(A)$ abgeschlossen.

Lösung: Für jedes $\mu \in \rho(A)$ ist nach (a) die offene Kreisscheibe um μ mit Radius $\frac{1}{||\mathrm{R}(\mu,A)||}$ ebenfalls in $\rho(A)$ enthalten. Also ist $\rho(A)$ offen und $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ abgeschlossen.

(c) Im Falle $\rho(A) \neq \emptyset$ ist die Abbildung $\rho(A) \to \mathcal{L}(X)$, $\mu \mapsto \mathrm{R}(\mu, A)$ stetig.

Lösung: Sei $(\mu_n \subset \rho(A))$ eine Folge, die gegen ein $\mu \in \rho(A)$ konvergiert. Wegen der Resolventengleichung gilt

$$||\,\mathrm{R}(\mu_n, A) - \mathrm{R}(\mu, A)|| \leq |\mu - \mu_n| \, ||\,\mathrm{R}(\mu_n, A)|| \, ||\,\mathrm{R}(\mu, A)||.$$

Sei $B = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \mu| < \frac{1}{2}\frac{1}{||\mathrm{R}(\mu,A)||}\}$. Für alle genügend großen $n \in \mathbb{N}$ gilt dann $\mu_n \in B$ und somit folgt aus (a) die Abschätzung

$$||\,\mathrm{R}(\mu_n, A)|| \leq ||\,\mathrm{R}(\mu, A)|| \sum_{n=0}^{\infty} |\mu - \mu_n|^n ||\,\mathrm{R}(\mu, A)||^n \leq ||\,\mathrm{R}(\mu, A)|| \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = 2||\,\mathrm{R}(\mu, A)||.$$

Also folgt für genügend große n, dass

$$||\,\mathrm{R}(\mu_n, A) - \mathrm{R}(\mu, A)|| \leq 2|\mu - \mu_n| \; ||\,\mathrm{R}(\mu, A)||^2 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Das zeigt die Behauptung.

(d) Sei $(\lambda_n) \subset \rho(A)$ eine Folge, die gegen ein $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert. Es gilt $\lambda_0 \in \sigma(A)$ genau dann, wenn $\sup_{n \in \mathbb{N}} ||\,\mathrm{R}(\lambda_n, A)|| = \infty$.

Lösung: „$\Rightarrow$“ Sei $\lambda_0 \in \rho(A)$. Wegen (c) ist die Abbildung $\rho(A) \to \mathbb{R}$, $\mu \to ||\,\mathrm{R}(\mu, A)||$ stetig und somit auf kompakten Menge beschränkt. Weil $\rho(A)$ offen ist, gibt es eine kompakte Umgebung $K \subset \rho(A)$ von λ_0. Weil fast alle λ_n in K liegen, folgt die Behauptung.

Bemerkung: Man hätte stattdessen auch verwenden können, dass wir im Beweis von (c) gezeigt haben, dass $||\,\mathrm{R}(\lambda, A)||$ auf einer Umgebung von λ_0 beschränkt ist.

„$\Leftarrow$“ Sei $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Dann gilt nach (a) die Abschätzung

$$||\,\mathrm{R}(\lambda_n, A)|| \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda_n, \sigma(A))} \geq \frac{1}{|\lambda_n - \lambda|} \to \infty \quad (n \to \infty).$$

5. Sei $l^2 := l^2(\mathbb{N})$ und sei $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Wir definieren $D(A_\alpha) = \{(x_n) \in l^2 : \ (\alpha_n x_n) \in l^2\}$ und $A_\alpha : D(A_\alpha) \to l^2$, $(x_n) \mapsto (\alpha_n x_n)$. Zeigen Sie:

(a) A_α ist abgeschlossen.

Lösung: Sei $x^{(m)} \subset D(A_\alpha)$ eine Folge, die in l^2 gegen ein $x^{(0)} \in l^2$ konvergiert. Außerdem gelte $\lim_{m\to\infty} A_\alpha x^{(m)} = y^{(0)}$ in l^2.

Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$, dass $\lim_{m\to\infty} x_n^{(m)} = x_n^{(0)}$ und folglich

$$\lim_{m\to\infty} (\alpha_n x_n^{(m)}) = \alpha_n x_n^{(0)}.$$

Andererseits folgt aus $\lim_{m\to\infty} A_\alpha x^{(m)} = y^{(0)}$ insbesondere für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Konvergenz

$$\lim_{m\to\infty} (\alpha_n x_n^{(m)}) = y_n^{(0)}.$$

Also ist $(\alpha_n x_n^{(0)})_{n\in\mathbb{N}} = y^{(0)} \in l^2$. Wir haben $x^{(0)} \in D(A_\alpha)$ und $A_\alpha x^{(0)} = y^{(0)}$ gezeigt; somit ist A_α abgeschlossen.

(b) $D(A_\alpha)$ liegt dicht in l^2.

Lösung: Offensichtlich ist $c_{00} := \{(x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \ \exists n_0 \, \forall n \geq n_0 : \ x_n = 0\} \subset D(A_\alpha)$. Weil c_{00} dicht in l^2 liegt, folgt die Behauptung.

(c) A_α ist genau dann beschränkt, wenn die Folge (α_n) in $\mathbb{C}$ beschränkt ist.

Lösung: „$\Rightarrow$" Sei $e^{(n)} \in l^2$ jeweils der n-te kanonische Einheitsvektor; es gilt $||e^{(n)}|| = 1$ und $e^{(n)} \in D(A_\alpha)$. Wenn die Folge (α_n) in $\mathbb{C}$ unbeschränkt ist, dann ist auch $||\alpha_n e^{(n)}|| = |\alpha_n|$ unbeschränkt. Insbesondere ist somit das Bild der Einheitskugel von $D(A_\alpha)$ unter A_α unbeschränkt, d.h. A_α ist unbeschränkt.

„$\Leftarrow$" Wenn (α_n) in $\mathbb{C}$ beschränkt ist, dann gilt für jedes $x \in D(A_\alpha)$, dass

$$||A_\alpha x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n x_n|^2 \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n|^2 ||x||^2,$$

Also ist A_α beschränkt.

(d) $\sigma(A_\alpha) = \overline{\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Lösung: „$\subset$" Sei $\lambda \notin \overline{\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Weil insbesondere $\lambda \notin \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist, können wir die Folge $\beta = (\beta_n) = (\frac{1}{\lambda - \alpha_n})$ betrachten und den Multiplikationsoperator A_β mit Definitionsbereich $D(A_\beta)$ definieren (analog zu A_α und $D(A_\alpha)$).

Offenbar ist das Bild von $(\lambda - A_\alpha)$ in $D(A_\beta)$ enthalten und es gilt $A_\beta(\lambda - A_\alpha) = I_{D(A_\alpha)}$. Ebenso ist das Bild von A_β in $D(A_\alpha)$ enthalten und es gilt $(\lambda - A_\alpha)A_\beta = I_{D(A_\beta)}$. Also bildet $\lambda - A_\alpha$ bijektiv von $D(A_\alpha)$ nach $D(A_\beta)$ ab.

Weil nun λ auch nicht im Abschluss von $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ liegt, gibt es ein $c > 0$, so dass $|\lambda - \alpha_n| \geq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Also ist die Folge $\beta = (\beta_n) := (\frac{1}{\lambda - \alpha_n})$ in $\mathbb{C}$ durch $\frac{1}{c}$ beschränkt; man sieht nun mit derselben Abschätzung, die wir in Teilaufgabe (c) verwendet haben, dass $D(A_\beta) = l^2$ ist. Somit ist $\lambda - A_\alpha : D(A_\alpha) \to l^2$ bijektiv und wegen der Abgeschlossenheit von A_α (oder wegen der Beschränktheit von A_β, die aus (c) folgt) impliziert dies $\lambda \in \rho(A_\alpha)$.

„$\supset$" Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\alpha_n - A_\alpha$ wegen $e^{(n)} \in \ker(\alpha_n - A_\alpha)$ nicht injektiv. Es folgt $\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \sigma(A_\alpha)$ und wegen der Abgeschlossenheit von $\sigma(A_\alpha)$ sogar $\overline{\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}} \subset \sigma(A_\alpha)$.