Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 08.05.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 36+14*

Lösungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 2

11. Sei X ein Banachraum und $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ eine Familie von Operatoren, die die folgenden Eigenschaften erfüllt: (5)

(i) $T(s+t) = T(t)T(s)$ für alle $s, t > 0$.

(ii) $\lim_{t\to 0} T(t)x = x$ für alle $x \in X$.

Zeigen Sie, dass $(T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe ist.

Tipp für die starke Stetigkeit: Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit, dass $||T(t)||$ auf einem genügend kleinen Intervall $[0, \delta)$ beschränkt ist (am einfachsten per Widerspruchsbeweis). Verwenden Sie dann einen Satz aus der Vorlesung.

Lösung: Weil die konstante Nullfolge in $[0, \infty)$ gegen 0 konvergiert, gilt $T(0) = I$ und offenbar gilt $T(t+s) = T(t)T(s)$ sogar für alle $s, t \geq 0$.

Als nächstes zeigen wir, dass es ein $\delta > 0$ und ein $M \geq 0$ gibt, so dass $||T(t)|| \leq M$ für alle $t \geq 0$ gilt: Wenn wir nämlich widerspruchshalber das Gegenteil annehmen, dann folgt, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $t_n \in [0, \infty)$ mit $||T(t_n)|| \geq n$ gibt. Für jeden Vektor $x \in X$ ist aber die Folge $(T(t_n)x)$ geegen x konvergent und somit beschränkt. Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit folgt, dass es ein $\tilde{M} \geq 0$ gibt mit der Eigenschaft $||T(t_n)|| \leq \tilde{M}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Widerspruch.

Also gibt es ein $\delta > 0$ und ein $M \geq 0$ mit $||T(t)|| \leq M$ für alle $t \in [0, \delta)$. Weil zugleich $\lim_{t\to 0} T(t)x = x$ für alle x aus einer dichten Teilmenge von X gilt (nämlich für alle x aus X selbst), folgt nach Vorlesung, dass $(T(t))_{t\geq 0}$ stark stetig ist.

12. Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \to X$ ein dicht definierter Operator auf X. Zeigen Sie: Wenn A abgeschlossen und beschränkt ist, dann muss $D(A) = X$ gelten. (2)

Lösung: Weil A beschränkt und dicht definiert ist, können wir A zu einem beschränkten linearen Operator $\hat{A} : X \to X$ fortsetzen.

Sei nun $x \in X$. Dann gibt es eine gegen x konvergente Folge $(x_n) \subset D(A)$. Aus der Stetigkeit von $\hat{A}$ folgt nun aber, dass $Ax_n = \hat{A}x_n$ gegen $\hat{A}x$ konvergiert. Wegen der Abgeschlossenheit von A folgt $x \in D(A)$.

13. Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator auf X. Weiter sei $\mu \in \rho(A)$. Zeigen Sie den Spektralen Abbildungssatz für Resolventen: $\sigma(\mathrm{R}(\mu, A)) \setminus \{0\} = \frac{1}{\mu - \sigma(A)}$. (3*)

Lösung: Offenbar ist 0 in keiner der beiden Mengen enthalten. Sei also $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Man rechnet leicht nach, dass

$$\mu - \frac{1}{\lambda} - A = \frac{1}{\lambda}(\mu - A)(\lambda - \mathrm{R}(\mu, A))$$

gilt. Also ist

$$\lambda \in \sigma(\mathrm{R}(\mu, A)) \quad \Leftrightarrow \quad \mu - \frac{1}{\lambda} \in \sigma(A) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \nu \in \sigma(A): \ \mu - \frac{1}{\lambda} = \nu$$
$$\Leftrightarrow \quad \exists \nu \in \sigma(A): \ \lambda = \frac{1}{\mu - \nu} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in \frac{1}{\mu - \sigma(A)}.$$

14. Sei X ein Banachraum und sei $A \in \mathcal{L}(X)$. Wir definieren

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ für jedes $A \in \mathcal{L}(A)$ in Operatornorm konvergiert (d.h. $\exp(A)$ ist für jedes $A \in \mathcal{L}(X)$ wohldefiniert und liegt wieder in $\mathcal{L}(X)$). (3)

Zeigen Sie außerdem, dass die Abbildung $\exp : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$, $A \mapsto \exp(A)$ stetig ist.

Tipp für die Stetigkeit: Zeigen Sie zuerst, dass für alle $A, B \in \mathcal{L}(X)$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ die geometrische Summenformel $A^{n+1} - B^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} A^k(A-B)B^{n-k}$ gilt.

Lösung: Es ist $\sum_{k=0}^{\infty} ||\frac{A^k}{k!}|| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{||A||^k}{k!} = \exp(||A||) < \infty$, also ist die Reihe $||_{|}|k = 0^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ absolut konvergent. Weil $\mathcal{L}(X)$ ein Banachraum ist, ist die Reihe somit auch in Operatornorm konvergent.

Die geometrische Summenformel $A^{n+1} - B^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} A^k(A-B)B^{n-k}$ rechnet man unmittelbar mit Hilfe eines Indexshifts nach (man beachte dabei, dass die Operatoren A und B nicht kommutieren müssen!). Sind nun $A, B \in \mathcal{L}(X)$, so folgt mit $c := \max\{||A||, ||B||\}$ die Abschätzung

$$||\exp A - \exp B|| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}||A^k - B^k|| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}|| \sum_{j=0^{k-1}} A^j(A-B)B^{k-1-j}|| \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} kc^{k-1}||A-B|| = \exp(c)||A-B||.$$

Für $A_n \to 0$ gilt $\max\{||A_n||, ||B||\} \to ||B||$ und folglich $||\exp(A_n) - \exp(B)|| \to 0$; also ist $\exp : \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$ stetig.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathcal{L}(X)$, $t \mapsto \exp(tA)$ bezüglich der Operatornorm differenzierbar ist mit Ableitung $A\exp(tA)$. (2)

Lösung: Sei $\Delta t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nach dem ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein ξ_n zwischen t und $t + \Delta t$, sodass $\frac{1}{\Delta t}\big((t+\Delta t)^n - t^n\big) = n\xi_n^{n-1}$ gilt. Es ist $|\xi_n^n - t^n| \leq n|\xi_n - t|\,(|t| + |\Delta t|)^{n-1}$ und wir berechnen

$$||\frac{1}{\Delta t}\big(\exp((t+\Delta t)A) - \exp(tA)\big) - A\exp(tA)|| =$$
$$= ||\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}\frac{1}{\Delta t}\big((t+\Delta t)^n - t^n\big) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{n+1}t^n}{n!}|| = ||\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{n+1}}{n!}(\xi_n^n - t^n)|| \leq$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - t|\frac{||A||^{n+1}}{(n-1)!}(|t| + |\Delta t|)^{n-1} \leq |\Delta t|\,||A||^2 \exp(||A||\,(|t| + |\Delta t|)) \;\to\; 0 \quad (\Delta t \to 0).$$

(c) Seien $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Zeigen Sie: Wenn A und B kommutieren, dann gilt $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. (2)

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Cauchysche Produktformel, die Sie aus der Analysis kennen, auch für absolut-konvergente Reihen beschränkter Operatoren auf Banachräumen gilt.

Lösung: Wenn A und B kommutieren gilt die Binomialentwicklung $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$. Somit haben wir

$$\exp(A+B) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}\frac{B^{n-k}}{(n-k)!} =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B^l}{l!} = \exp(A)\exp(B).$$

(d) Sei $(T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X mit Generator A. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind: (6)

(i) Die Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ ist sogar normstetig, d.h. für alle $t_0 \geq 0$ gilt $\lim_{t\to t_0} T(t) = T(t_0)$ in Operatornorm.

(ii) Die Ableitung $\dot{T}(0) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(t) - I)$ existiert sogar bzgl. der Operatornorm.

(iii) Es gibt ein $B \in \mathcal{L}(X)$ derart, dass $T(t) = \exp(tB)$ für alle $t \geq 0$.

(iv) Der Generator A ist auf ganz X definiert.

(v) Der Generator A ist stetig.

Zeigen Sie zudem: Falls die Aussagen (i) bis (v) erfüllt sind, gilt $\dot{T}(0) = A = B$.

Tipp für die Implikation (i) ⇒ (ii): Definieren Sie $V(t) := \int_0^t T(s)\,\mathrm{d}s$ *für alle* $t > 0$*; zeigen Sie, dass* $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} V(t) = I$ *in Operatornorm gilt, und dass für alle* $t > 0$ *und für alle genügend kleinen* $t_0 > 0$ *die Formel* $T(t) = V(t_0)^{-1}(V(t+t_0) - V(t))$ *gilt.*

Lösung: *„(i) ⇒ (ii)“* Weil die Abbildung $t \mapsto T(t)$ normstetig ist, können wir im Banachraum $\mathcal{L}(X)$ das Riemann-Integral $V(t) = \int_0^t T(s)\,\mathrm{d}s$ betrachten. Nach dem HDI gilt $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(V(t) - 0) = T(0) = I$, wobei die Konvergenz bezüglich der Norm im Banachraum $\mathcal{L}(X)$ erfolgt (also bezüglich der Operatornorm).
Es ist I invertierbar, und weil die Menge der invertierbaren Elemente offen in $\mathcal{L}(X)$ ist, gilt für alle genügend kleinen $t_0 > 0$, dass auch $V(t_0)$ invertierbar ist. Für solch ein $t_0 > 0$ und jedes $t \geq 0$ berechnen wir

$$T(t) = V(t_0)^{-1}V(t_0)T(t) = V(t_0)^{-1} \int_0^{t_0} T(t+s)\,\mathrm{d}s =$$
$$= V(t_0)^{-1} \int_t^{t+t_0} T(s)\,\mathrm{d}s = V(t_0)^{-1}(V(t+t_0) - V(t)).$$

Nach dem HDI sind $V(t+t_0)$ und $V(t)$ bezüglich der Operatornorm nach t differenzierbar, also ist auch $T(t)$ bezüglich der Operatornorm nach $T(t)$ differenzierbar. Insbesondere existiert $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T(t) - T(0))$ in Operatornorm.

„(ii) ⇒ (iii)“ Wenn die Ableitung $\dot{T}(0)$ bezüglich der Operatornorm existiert, ist $A = \dot{T}(0) \in \mathcal{L}(X)$. Wir definieren $S(t) := \exp(tA)$ für alle $t \geq 0$. Dann ist $(S(t))_{t\geq 0}$ ebenfalls eine C_0-Halbgruppe auf X und besitzt denselben Generator wie $(T(t))_{t\geq 0}$. Weil der Generator die Halbgruppe eindeutig festlegt, folgt $T(t) = \exp(tA)$ für alle $t \geq 0$.

„(iii) ⇒ (iv)“ Wenn $T(t) = \exp(tB)$ für ein $B \in \mathcal{L}(X)$, dann folgt aus Teilaufgabe (ii), dass $A = B$. Inbesondere ist A auf ganz X definiert.

„(iv) ⇒ (v)“ Folgt aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.

„(v) ⇒ (i)“ Weil A als Generator einer stark stetigen Halbgruppen abgeschlossen und dicht definiert ist, folgt aus Aufgabe 12, dass A auf ganz X definiert ist, falls A stetig ist. Somit ist $A \in \mathcal{L}(X)$. Wir betrachten wieder die Halbgruppe $(\exp(tA))_{t\geq 0}$ mit Generatoor A; weil der Generator die Halbgruppe eindeutig bestimmt, ist $T(t) = \exp(tA)$ für alle $t \geq 0$. Nach Teilaufgabe (i) ist $(T(t))_{t\geq 0}$ folglich normstetig.

Seien nun die Aussagen (i) - (v) erfüllt. Nach Definition des Generators ist $A = \dot{T}(0)$ und nach Teilaufgabe (ii) ist $\dot{T}(0) = B$.

(e) Sei $X = \mathbb{C}^2$, seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und seien $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit (2)

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\exp(A)$, $\exp(B)$ und $\exp(A+B)$.

Lösung: Es ist

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Weiterhin ist $B^n = 0$ für alle $n \geq 2$ und somit $\exp(B) = I + B$. Weil A und B kommutieren, gilt nach Teilaufgabe (c) außerdem $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$. Somit haben wir

$$\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \exp(A+B) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda) & \exp(\lambda)\mu \\ 0 & \exp(\lambda) \end{pmatrix}.$$

15. Sei X ein Banachraum und seien $A, B \in \mathcal{L}(X)$. Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(i) A und B kommutieren.

(ii) $\exp(tA)$ und $\exp(tB)$ kommutieren für alle $t \in \mathbb{R}$.

(iii) $\exp(tA)$ und $\exp(sB)$ kommutieren für alle $t, s \in \mathbb{R}$.

(iv) $\exp(A)$ und $\exp(B)$ kommutieren.

Wir wollen untersuchen, wie diese Aussagen miteinander zusammenhängen.

(a) Zeigen Sie: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv). (5*)

Lösung: *„(i) $\Rightarrow$ (ii)"* Wenn A und B kommutieren, gilt

$$\exp(A)\exp(B) = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{A^k}{k!}\frac{B^j}{j!}\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{B^j}{j!}\frac{A^k}{k!}\Big) = \exp(B)\exp(A).$$

Wenn A und B kommutieren, kommutieren aber auch tA und tB für jedes $t \geq 0$. Also folgt aus dem gerade Gezeigten, dass $\exp(tA)$ und $\exp(tB)$ für jedes $t \geq 0$ kommutieren.

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Sei $t \in \mathbb{R}$. Falls $t = 0$ gilt, ist die Behauptung klar. Für $t \neq 0$ sei $M := \{s \in \mathbb{R} : \exp(tA)\exp(sB) = \exp(sB)\exp(tA)\}$. Offensichtlich ist $0 \in M$ und nach Voraussetzung gilt $t \in M$. Außerdem sieht man leicht, dass für jedes $s \in M$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ auch $-s$ auch ks in M liegen. Außerdem gilt $\frac{t}{k} \in M$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Damit ist $\mathbb{Q}t \subset M$.
Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion ist M abgeschlossen, und weil $\mathbb{Q}t$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, folgt $M = \mathbb{R}$.

„(iii) $\Rightarrow$ (iv)" Klar.

„(iii) $\Rightarrow$ (i)" Es gilt

$$\begin{aligned} A\exp(tA)\,B\exp(sB) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\exp(tA)\exp(sB) = \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\exp(sB)\exp(tA) = B\exp(sB)\,A\exp(tA). \end{aligned}$$

Wenn wir $t = s = 0$ setzen, folgt die Behauptung.

(b) Zeigen Sie, dass die Implikation (iv) $\Rightarrow$ (i) im Allgemeinen falsch ist. Finden Sie dazu zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, so dass $\exp(A)$ und $\exp(B)$ kommutieren, A und B hingegen nicht. (2*)
Tipp: Ein Jordanblock und eine geschickte gewählte Diagonalmatrix reichen aus!

Lösung: Wir wählen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\pi i \end{pmatrix}.$$

Dann kommutieren A und B nicht. Weil aber $\exp(B) = I$ gilt, kommutieren $\exp(A)$ und $\exp(B)$.

Für die Lösung der nächsten beiden Aufgaben stellen wir (der Vollständigkeit halber) die folgende Proposition bereit:

Proposition. *Sei (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum, $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und sei $p \in [1, \infty)$. Außerdem sei $\Phi : I \to L^p(\Omega)$ stetig. Falls es derartige Repräsentanten von $\Phi(t)$ (mit $t \in I$) gibt, dass die Abbildung $\Phi(\cdot)(\cdot) : I \times \Omega \to \mathbb{C}$ messbar ist, dann gilt*

$$\Big(\int_I \Phi(t)\,\mathrm{d}t\Big)(x) = \int_I \Phi(t)(x)\,\mathrm{d}t \quad \textit{für fast alle } x \in I.$$

Beweis. Man beachte zunächst, dass (mit dem Satz von Fubini-Tonelli)

$$\int_{I\times\Omega} |\Phi(t)(x)|^p\,\mathrm{d}(t,x) = \int_I\int_\Omega |\Phi(t)(x)|^p\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_I ||\Phi(t)||_p^p\,\mathrm{d}t < \infty$$

gilt, weil $t \mapsto ||\Phi(t)||_p^p$ stetig und I kompakt ist. Also ist $\Phi(\cdot)(\cdot) \in L^p(I \times \Omega)$.
Ebenfalls wegen Fubini-Tonelli ist somit $\int_I |\Phi(t)(x)|^p\,\mathrm{d}t$ für fast alle $x \in \Omega$ endlich. Weil I endliches Lebesgue-Maß besitzt, ist also auch $\int_I |\Phi(t)(x)|\,\mathrm{d}t < \infty$ für fast alle $x \in \Omega$, d.h. das Integral auf der rechten Seite unserer Behauptung existiert für fast alle $x \in \Omega$.

Sei nun p' der zu p konjugierte Index und sei $g \in L^{p'}(\Omega)$. Dann ist die Abbildung $L^p(\Omega) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto \int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ ein stetiges lineares Funktional auf $L^p(\Omega)$. Nach Proposition 2 im Anhang zu Abschnitt 1.2 ist damit aber

$$\int_\Omega \Big(\int_I \Phi(t)\,\mathrm{d}t\Big)(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_I\int_\Omega \Phi(t)(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Weil I endliches Lebesgue-Maß besitzt, ist $g : I \times \Omega \to \mathbb{C}$, $(t, x) \mapsto g(x)$ sogar auf dem Produktraum $I \times \Omega$ p'-integrierbar; also impliziert die Hölder-Ungleichung, dass $I \times \Omega \to \mathbb{C}$, $(t, x) \mapsto \Phi(t)(x)\ g(x)$ integrierbar ist. Mit dem Satz von Fubini können wir jetzt weiterrechnen:

$$\int_I \int_\Omega \Phi(t)(x)\ g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_\Omega \int_I \Phi(t)(x)\,\mathrm{d}t\, g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Damit haben wir insgesamt

$$\int_\Omega \Big(\int_I \Phi(t)\,\mathrm{d}t\Big)(x) g(x)\,\mathrm{d}x = \int_I \int_\Omega \Phi(t)(x)\ g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_\Omega \int_I \Phi(t)(x)\,\mathrm{d}t\, g(x)\,\mathrm{d}x$$

gezeigt. Weil $g \in L^{p'}(\Omega)$ beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

16. Sei $X = L^p(\mathbb{R})$ für $1 \leq p < \infty$. Dieser Raum ist zusammen mit der p-Norm ein Banachraum.

Sei zudem $\alpha \in \mathbb{R}$ und für jedes $t \geq 0$ und jedes $f \in X$ setzen wir $T(t)f = f(\cdot + \alpha t)$.

(a) Zeigen Sie, dass $(T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe ist. (3)

Lösung: Wir zeigen nur die starke Stetigkeit, die anderen Eigenschaften sind klar. Weil $||T(t)|| \leq 1$ für alle $t \geq 0$ gilt und weil die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht in X liegen, genügt es $\lim_{t\to 0} T(t)f = f$ für alle stetigen $f \in X$ mit kompakten Träger zu zeigen.

Sei also $f \in X$ stetig mit kompaktem Träger, und sei $[-n, n]$ ein Intervall, das den Träger von f komplett enthält. Sei $\varepsilon > 0$. Es ist f (aufgrund des kompakten Trägers) sogar gleichmäßig stetig, also gibt es ein $\delta \in (0, 1)$ derart, dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ gilt, falls $|x - y| < |\alpha|\delta$ ist. Für $t < \delta$ gilt dann

$$||T(t)f - f||^p = \int_{-n-|\alpha|}^{n+|\alpha|} |f(x + \alpha t) - f(x)|^p\,\mathrm{d}x \leq 2(n + |\alpha|)\varepsilon^p.$$

Daraus folgt die Behauptung.

(b) Sei A der Generator der Halbgruppe. Zeigen Sie, dass (2)

$$B := \{f \in X|\ f \text{ ist einmal stetig differenzierbar mit } f' \in X\} \subset D(A)$$

ist, und dass für jedes $f \in B$ gilt: $Af = \alpha f'$.

Lösung: Sei $f \in B$. Nach der Allerweltsformel in Proposition (2.8) müssen wir nachprüfen, dass für jedes $t \geq 0$ die Gleichheit $T(t)f - f = \int_0^t T(s)\alpha f'\,\mathrm{d}s$ gilt. Nun ist für fast alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\Big(\int_0^t T(s)\alpha f'\,\mathrm{d}s\Big)(x) &= \int_0^t (T(s)\alpha f')(x)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \alpha f'(x + \alpha s)\,\mathrm{d}s = \\ &= \int_x^{x+\alpha t} f'(s)\,\mathrm{d}s = f(x + \alpha t) - f(x) = (T(t)f - f)(x).\end{aligned}$$

Also ist $f \in D(A)$ und $Af = \alpha f'$.

(c) Zeigen Sie, dass $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$ gilt. (2)

Tipp: Verwenden Sie, dass die Spektralschranke des Generators einer stark stetigen Halbgruppe stets kleiner oder gleich der Wachstumsschranke der Halbgruppe ist.

Lösung: Offenbar ist die Halbgruppe $T(t)$ beschränkt, also gilt $s(A) \leq \omega(T) \leq 0$. Sei andererseits $(S(t))_{t\geq 0}$ die entsprechende Halbgruppe zum Parameter $-\alpha$. Dann hat $(S(t))_{t\geq 0}$ den Generator $-A$ (es gilt nämlich $T(1)S(t) = T(1 - t)$ für $t \in [0, 1]$. Ableiten bei $t = 0$ liefert die Behauptung, weil $T(1)$ invertierbar ist).

Weil $(S(t))_{t\geq 0}$ ebenfalls beschränkt ist, gilt auch $s(-A) \leq 0$. Es ist aber $\sigma(-A) = -\sigma(A)$, also ist $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ für jedes $\lambda \in \sigma(A)$. Dies zeigt $\sigma(A) \subset i\mathbb{R}$.

17. Sei $X = L^p([0, 1])$ für $1 \leq p < \infty$. Für jedes $f \in X$ und für alle $t, s \geq 0$ setzen wir

$$(T(t)f)(s) = \begin{cases} f(s + t), & \text{falls } s + t \leq 1, \\ 0, & \text{falls } s + t > 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) $(T(t))_{t\geq 0}$ ist eine stark stetige Halbgruppe. (3)

Lösung: Wir zeigen wieder nur die starke Stetigkeit. Weil $||T(t)|| \leq 1$ für alle $t \geq 0$ gilt und weil die stetigen Funktionen dicht in X liegen, genügt es zu zeigen, dass $\lim_{t\to 0} T(t)f = f$ für alle stetigen $f \in X$ gilt. Sei also $f \in X$ stetig und $\varepsilon > 0$. Weil der Definitionsbereich von f kompakt ist, ist f sogar gleichmäßig stetig. Also gibt es ein $\delta > 0$ mit $\delta < \min\{1, \varepsilon^p\}$ sodass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für $|x - y| < \delta$ gilt. Für $t < \delta$ folgt dann

$$\begin{aligned} ||T(t)f - f||^p &= \int_0^{1-t} |f(s+t) - f(s)|^p \, \mathrm{d}s + \int_{1-t}^1 |-f(s)|^p \, \mathrm{d}s \leq \\ &\leq (1-t)\varepsilon^p + t||f||_\infty^p \leq \varepsilon^p + ||f||_\infty^p \varepsilon^p. \end{aligned}$$

(b) Für den Generator A der Halbgruppe gilt (2)

$$B_0 := \{f \in X : f \text{ ist einmal stetig differenzierbar mit } f' \in X \text{ und } f(1) = 0\} \subset D(A)$$

und $Af = f'$ für alle $f \in B_0$.

Lösung: Wir benutzen wieder die Allerweltsformel, um die Behauptung nachzurechnen. Sei $f \in B_0$. Für zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ verwenden wir die Kurzschreibweise $a \wedge b := \min\{a, b\}$. Dann gilt für $t \geq 0$ und für fast alle $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \Big(\int_0^t T(s)f' \, \mathrm{d}s\Big)(x) &= \int_0^{(1-x)\wedge t} f'(x+s) \, \mathrm{d}s = \int_x^{1\wedge(t+x)} f'(s) \, \mathrm{d}s = \\ &= f(1 \wedge (t+x)) - f(x) = (T(t)f)(x) - f(x). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt, weil im Falle $t + x \leq 1$ die Identität $f(1 \wedge (t+x)) = f(t+x) = (T(t)f)(x)$ und im Falle $t + x > 1$ die Identität $f(1 \wedge (t+x)) = f(1) = 0 = (T(t)f)(x)$ gilt.

(c) $\sigma(A) = \emptyset$. (2)

Lösung: Für jedes $t > 1$ gilt $T(t) = 0$, also ist $s(A) \leq \omega(A) = -\infty$. Daraus folgt $\sigma(A) = \emptyset$.

18. Für jede stark stetige Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf einem Banachraum X definieren wir die Wachstumsschranke (4*)

$$\omega(T) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} | \; \exists M \geq 1 \; \forall t \geq 0 : \; ||T(t)|| \leq M \exp(\omega t)\}. \qquad (*)$$

Finden Sie eine stark stetige Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf $X = \mathbb{C}^2$ derart, dass $\omega(T) = 0$ gilt und $\omega(T)$ in $(*)$ lediglich ein Infimum, aber kein Minimum ist!

Lösung: Wir wählen $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ als zwei-dimensionaler Jordanblock zum Eigenwert 0 und $T(t) = \exp(tA)$. Damit haben wir

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T(t) = \exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\omega(T) = 0$ (wobei wir zur $\mathbb{C}^{2\times 2}$ mit der Operatornorm versehen, die von einer beliebig vorgegebenen Norm auf $\mathbb{C}^2$ induziert wird). Zugleich ist $||T(t)||$ für $t \geq 0$ nicht beschränkt, also kann nicht $||T(t)|| \leq M \exp(0 \cdot t) = M$ für ein $M < \infty$ und alle $t \geq 0$ gelten. Folglich ist $\omega(T)$ in $(*)$ kein Minimum.