UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Mittwoch, 19.06.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 18+11*

Lösungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 8

40. Sei X ein Banachraum, A ein sektorieller Operator vom Winkel $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ und sei $(T(z))_{z\in\Sigma_\theta}$ die von A erzeugte analytische Halbgruppe auf Σ_θ, d.h. (3)

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{z\lambda}\,\mathrm{R}(\lambda, A)\,\mathrm{d}\lambda$$

für einen geeigneten Weg γ.

Zeigen Sie für $z \in \Sigma_\theta$: Es gilt $e^{z\sigma_{\mathrm{p}}(A)} \subset \sigma_{\mathrm{p}}(T(z))$, genauer: Wenn x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert μ ist, dann ist x auch ein Eigenvektor von $T(z)$ zum Eigenwert $e^{z\mu}$.

Lösung: Sei x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert μ. Für jedes $\lambda \in \rho(A)$ gilt dann $\mathrm{R}(\lambda, A)x = \frac{1}{\lambda-\mu}x$. Somit erhalten wir

$$T(z)x = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{z\lambda}\,\mathrm{R}(\lambda, A)x\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{z\lambda}\frac{1}{\lambda-\mu}x\,\mathrm{d}\lambda = e^{z\mu}x,$$

wobei die letzte Gleicheit wegen $\mu \in \sigma(A)$ aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt, indem man den Integrationsweg links durch Kreisebögen mit größer werdendem Radius abschließt (man beachte hierbei, dass es ein $c < 0$ gibt, sodass $\operatorname{Re} e^{z\lambda} < c$ für alle λ gilt, die genügend weit links auf γ liegen).

41. Sei $1 \le p < \infty$ und $X = l^p := l^p(\mathbb{N})$. Für eine Folge $\alpha = (\alpha)_n \subset \mathbb{C}$ sei M_α der zugehörige Multiplikationsoperator auf l^p (mit kanonischem Definitionbereich).

(a) Ist M_α immer dicht definiert? Ist M_α immer abgeschlossen? (2)

Lösung: Der Definitionsbereich von M_α ist durch $D(M_\alpha) := \{x \in l^p : (\alpha_n x_n) \in l^p\}$ gegeben. Wegen $c_{00} \subset D(M_\alpha)$ ist M_α dicht definiert.

Wir zeigen, dass M_α auch abgeschlossen ist: Sei dazu $l^p \ni x^{(k)} \to x^{(0)}$ und $M_\alpha x^{(k)} \to y^{(0)}$. Weil die l^p-Konvergenz die Punktweise-Konvergenz impliziert folgt also für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n^{(k)} \to x_n^{(0)} \quad \text{und} \quad \alpha_n x_n^{(k)} \to y_n^{(0)}.$$

Dies zeigt $\alpha_n x_n^{(0)} = y_n^{(0)}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und somit $M_\alpha x^{(0)} = y^{(0)}$. Also ist M_α abgeschlossen.

(b) Zeigen Sie: Es gilt $M_\alpha \in \mathcal{L}(X)$ genau dann, wenn die Folge α beschränkt ist. Zeigen Sie weiterhin, dass in diesem Fall $||M_\alpha|| = ||\alpha||_\infty$ gilt. (3)

Lösung: Seien $e^{(k)}$ die kanonischen Einheitvektoren in l^p. Wenn die Folge α unbeschränkt ist, dann ist auch die Menge $\{||M_\alpha e^{(k)}||_p : k \in \mathbb{N}\} = \{|\alpha_k| : k \in \mathbb{N}\}$ unbeschränkt. Wegen $||e^{(k)}||_p = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt, dass M_α nicht stetig ist.

Sei nun stattdessen die Folge α_n beschränkt. Dann gilt für jedes $x \in l^p$:

$$||(\alpha_n x_n)||_p = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n x_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \le ||\alpha||_\infty ||x||_p.$$

Also ist $D(M_\alpha) = X$ und $M_\alpha \in \mathcal{L}(X)$ mit Operatornorm $||M_\alpha|| \le ||\alpha||_\infty$. Andererseits gilt

$$||M_\alpha|| = \sup\{||M_\alpha x||_p : ||x||_p \le 1\} \ge \sup\{||M_\alpha e^{(k)}|| : k \in \mathbb{N}\} = \sup\{|\alpha_k| : k \in \mathbb{N}\} = ||\alpha||_\infty.$$

Dies zeigt $||M_\alpha|| = ||\alpha||_\infty$.

(c) Zeigen Sie: M_α erzeugt genau dann eine C_0-Halbgruppe auf X, wenn $\sup\{\operatorname{Re}\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ ist. (4)

Bestimmen Sie in diesem Fall die von M_α erzeugte Halbgruppe.

Lösung: Wie wir es bereits im Fall von l^2 getan haben, zeigt man auch für l^p die Eigenschaft $\sigma(M_\alpha) = \overline{\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

Sei nun $S := s(M_\alpha) = \sup\{\operatorname{Re}\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wenn $S < \infty$ ist, dann ist $\sigma(M_\alpha - S)$ komplett in der linken Halbebene enthalten. Insbesondere gilt $(0, \infty) \subset \rho(M_\alpha - S)$. Außerdem gilt für jedes $\lambda > 0$

$$\mathrm{R}(\lambda, M_\alpha - S) = \mathrm{R}(\lambda, M_{\alpha - S}) = M_{\frac{1}{\lambda - (\alpha - S)}}$$

und somit

$$||\,\mathrm{R}(\lambda, M_\alpha - S)|| = ||M_{\frac{1}{\lambda-(\alpha-S)}}||_\infty = \sup\{\frac{1}{|\lambda - (\alpha_n - S)|} : n \in \mathbb{N}\} \leq \frac{1}{\lambda},$$

wobei die letzte Ungleichung aus $|\lambda - (\alpha_n - S)| \geq \operatorname{Re}\lambda - (\alpha_n - S) = \lambda - (\operatorname{Re}\alpha_n - S) \geq \lambda$ folgt. Nach dem Hille-Yosida-Theorem erzeugt $M_\alpha - S$ also eine kontraktive C_0-Halbgruppe und somit erzeugt M_α eine C_0-Halbgruppe.

Wenn nun umgekehrt M_α eine C_0-Halbgruppe erzeugt, dann muss die Spektralschranke von M_α kleiner als ∞ sein, d.h es gilt $S < \infty$.

Wir zeigen nun: Wenn $S < \infty$ gilt, dann ist $(M_{e^{t\alpha}})_{t \geq 0}$ die von M_α erzeugte Halbgruppe: Die Halbgruppen-Eigenschaft ist klar; auf c_{00} ist die starke Stetigkeit von M_α ebenfalls klar und wegen $S < \infty$ ist $M_{e^{t\alpha}}$ für $t \in [0, 1]$ beschränkt. Somit ist $(M_{e^{t\alpha}})_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe. Dass M_α der Generator dieser Halbgruppe ist, rechnet man leicht mit der Allerweltsformel nach.

(d) Sei $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Charakterisieren Sie, wann M_α sektoriell vom Winkel θ ist. (3)

Lösung: Wir zeigen: M_α ist genau dann sektoriell vom Winkel θ, wenn $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\theta} \subset \rho(M_\alpha)$ gilt (d.h. die Wachstumsbedingung an die Resolvente ist für Multiplikationsoperatoren redundant):

Die Implikation von links nach rechts ist klar; für die Rückrichtung müssen wir beweisen, dass die Wachstumsbedingung für die Resolvente automatisch erfüllt ist:

Sei also $\lambda \in \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\theta}$. Dann rechnen wir ähnlich wie in Teilaufgabe (c) nach, dass

$$||\,\mathrm{R}(\lambda, M_\alpha)|| = \sup\{\frac{1}{|\lambda - \alpha_n|} : n \in \mathbb{N}\} = \sup\{\frac{1}{|\lambda||1 - \frac{\alpha_n}{\lambda}|} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Sei nun $\varphi \in (0, \theta)$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in \overline{\Sigma}_{\frac{\pi}{2}+\varphi} \setminus \{0\}$ liegt dann $\frac{\alpha_n}{\lambda}$ niemals im Sektor $\Sigma_{\theta-\varphi}$. Also gibt es ein $c > 0$ mit $|1 - \frac{\alpha_n}{\lambda}| \geq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\lambda \in \overline{\Sigma}_{\frac{\pi}{2}+\varphi} \setminus \{0\}$. Wir schließen

$$||\,\mathrm{R}(\lambda, M_\alpha)|| \leq \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{c}$$

für alle $\lambda \in \overline{\Sigma}_{\frac{\pi}{2}+\varphi} \setminus \{0\}$. Damit ist gezeigt, dass M_α sektoriell vom Winkel θ ist.

(e) Sei $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Charakterisieren Sie, wann M_α eine sektoriell kontraktive Halbgruppe vom Winkel θ erzeugt. (3)

Lösung: Wir zeigen: M_α erzeugt genau dann eine sektoriell kontraktive Halbgruppe vom Winkel θ, wenn $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\theta} \subset \rho(M_\alpha)$ ist.

Man beachte: Dies zeigt zusammen mit Teilaufgabe (d), dass eine sektoriell beschränlte Halbgruppe, die von eine Multiplikationsoperator erzeugt wird, sogar immer sektoriell kontraktiv ist.

Die Implikation von links nach rechts haben wir bereits in Aufgabe 33 bewiesen. Für die umgekehrte Implikation sei $z \in \Sigma_\theta$. Wir wissen aus Teilaufgabe (c), dass M_α die Halbgruppe $(M_{e^{t\alpha}})_{t\geq 0}$ erzeugt. Außerdem ist $(M_{e^{z\alpha}})_{z\in\Sigma_\theta}$ die holomorphe Fortsetzung dieser Halbgruppe auf den Sektor Σ_θ (wegen $\operatorname{Re}(z\alpha_n) \leq 0$ folgt aus Teilaufgabe (b), dass die $M_{e^{z\alpha}}$ stetige lineare Operatoren sind und ihre Operatornorm lokal beschränkt bzgl. z ist; die Holomorphie folgt dann aus dem Satz von Arendt-Nikolsky).

Tatsächlich folgt aus der Bedingung $\operatorname{Re}(z\alpha_n) \leq 0$ für alle $z \in \Sigma_\theta$ und alle $n \in \mathbb{N}$ aber sogar mehr: Es ist $||M_{e^{z\alpha}}|| = ||e^{\alpha z}||_\infty = ||e^{\operatorname{Re}\alpha z}||_\infty \leq 1$. Also erzeugt M_α sogar eine sektoriell kontraktive Halbgruppe vom Winkel θ.

42. Sei X ein Banachraum, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ und $A \in \mathcal{L}(X)$ mit $\rho(A) \supset \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\theta}$.

(a) Zeigen Sie: Wenn $0 \notin \sigma(A)$ gilt, dann ist A sektoriell vom Winkel θ. (4*)

Tipp: Verwenden Sie für genügend große λ die Neumann-Reihe zur Darstellung der Resolventen, um eine Abschätzung für die Resolvente zu erhalten.

Lösung: Wir müssen lediglich die Resolventen-Abschätzung zeigen. Zunächst beachte man, dass für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > \mathrm{r}(A)$ gilt:

$$\mathrm{R}(\lambda, A) = \frac{1}{\lambda}\,\mathrm{R}(1, \frac{A}{\lambda}) = \frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}.$$

Falls sogar $|\lambda| > ||A||$ gilt, so erhalten wir daraus die Abschätzung

$$||\,\mathrm{R}(\lambda, A)|| \le \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{||A^n||}{|\lambda|^n} \le \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{||A||^n}{|\lambda|^n} = \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1-\frac{||A||}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - ||A||}$$

Also gilt zum Beispiel für $|\lambda| > 2||A||$ die Abschätzung

$$||\,\mathrm{R}(\lambda, A)|| \le \frac{1}{|\lambda| - ||A||} < \frac{1}{|\lambda| - \frac{1}{2}|\lambda|} = \frac{2}{|\lambda|}.$$

Sei nun $\varphi \in (0, \theta)$ ein beliebiger Winkel. Wegen $0 \notin \sigma(A)$ gilt $\overline{\Sigma}_\varphi \subset \Sigma_\theta \cup \{0\} \subset \rho(A)$.
Setze nun $M = \{\lambda \in \overline{\Sigma}_\varphi : |\lambda| \le 2||A||\}$ und $N = \overline{\Sigma}_\varphi \setminus M$.
Dann ist die Resolvente von A auf ganz M definiert dort durch eine Konstante C beschränkt (wegen der Kompaktheit von M).
Für alle $\lambda \in M$ gilt somit $||\lambda\,\mathrm{R}(\lambda, A)|| \le 2||A||C$ und für alle $\lambda \in N$ gilt $||\lambda\,\mathrm{R}(\lambda, A)|| \le |\lambda|\,\frac{2}{|\lambda|} = 2$.
Damit haben wir $||\lambda\,\mathrm{R}(\lambda, A)|| \le \max\{2||A||C, 2\}$ für alle $\lambda \in \overline{\Sigma}_\varphi$ gezeigt.

(b) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Bedingung $0 \notin \sigma(A)$ aus Teilaufgabe (a) im Allgemeinen nicht weggelassen werden kann. (2*)

Lösung: Wir betrachten den Banachraum $X = (\mathbb{C}^2, ||\cdot||_\infty)$. Jeden Operator auf X identifizieren wir mit seiner Darstellungsmatrix bzgl. der kanonischen Basis. Es sei $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ der Jordanblock zum Eigenwert 0. Wege $\sigma(J) = \{0\}$ gilt $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\theta} \subset \rho(A)$ für jedes $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$.
Zugleich ist aber für jedes $\lambda \neq 0$

$$\mathrm{R}(\lambda, A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & \frac{-1}{\lambda^2} \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix},$$

also $||\lambda\,\mathrm{R}(\lambda, A)|| = 1\frac{1}{|\lambda|}$. Also ist $\lambda\,\mathrm{R}(\lambda, A)$ auf $(0, \infty)$ und somit auch auf jedem Sektor $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\theta}$ unbeschränkt. Folglich ist A nicht sektoriell (genauer: es gibt kein $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ derart, dass A sektoriell vom Winkel θ ist).

43. Sei $\alpha = (\alpha_n) \subset \mathbb{C}$ eine Folge mit nach rechts beschränkten Realteilen. Nach Aufgabe 41 (c) erzeugt M_α eine C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\ge 0}$ auf l^p.

(a) Charakterisieren Sie an Abhängigkeit von α, wann die Gleichheit $\sigma(T(t)) = e^{t\sigma(M_\alpha)}$ für alle $t \ge 0$ gilt. (3*)

Lösung: In der Lösung von Aufgabe 41 (c) haben wir bereits gezeigt, dass M_α die C_0-Halbgruppe $(M_{e^{t\alpha}})_{t\ge 0}$ erzeugt und festgestellt, dass das Spektrum jedes Multiplikationsoperators M_β durch $\sigma(M_\beta) = \overline{\{\beta_n : n \in \mathbb{N}\}}$ gegeben ist. Damit ist

$$\begin{aligned} & \sigma(T(t)) = e^{t\sigma(M_\alpha)} \\ \Leftrightarrow\quad & \overline{\{e^{t\alpha_n} : n \in \mathbb{N}\}} = e^{\overline{\{t\alpha_n : n\in\mathbb{N}\}}}. \end{aligned}$$

Die Inklusion „$\supset$“ ist stets richtig und die umgekehrte Inklusion gilt genau dann, wenn $e^{\overline{\{t\alpha_n : n\in\mathbb{N}\}}}$ abgeschlossen ist.

Damit haben wir insgesamt als Charakterisierung:

$$\sigma(T(t)) = e^{t\sigma(M_\alpha)}\ \forall t \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\overline{\{t\alpha_n : n\in\mathbb{N}\}}} \text{ ist für alle } t \ge 0 \text{ abgeschlossen.}$$

(b) Wie können Sie die Mengengleichheit aus Teilaufgabe (a) abändern, so dass sie für jede Folge $\alpha = (\alpha_n)$ mit nach rechts beschränkten Realteilen richtig ist? (2*)

Lösung: Aus unserer Argumentation bei der Lösung der Teilaufgabe (a) erkennt man, dass die Gleichheit

$$\sigma(T(t)) = \overline{e^{t\sigma(M_\alpha)}}$$

für alle Multiplikationsoperatoren M_α auf l^p erfüllt ist (natürlich sofern $\sup\{\mathrm{Re}\,\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ gilt).