Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 19+9*

Lösungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 9

44. Sei X ein Banachraum und A der Generator einer C_0-Halbgruppe auf X. Außerdem sei $D(A)$ mit der Graphnorm ausgestattet und $B : D(A) \to X$ sei linear.

(a) Sei $\lambda \in \rho(A)$. Zeigen Sie: B ist genau dann stetig, wenn der Operator $B\,\mathrm{R}(\lambda, A) : X \to X$ stetig ist. (2)

Lösung: Es ist $\mathrm{R}(\lambda, A) : X \to D(A)$ stetig. Wenn $B : D(A) \to X$ stetig ist, ist also auch $B\,\mathrm{R}(\lambda, X) : X \to X$ stetig.

Sei nun umgekehrt $B\,\mathrm{R}(\lambda, A) : X \to X$ stetig. Weil $\lambda - A : D(A) \to X$ stetig ist, ist auch $B = B\,\mathrm{R}(\lambda, A)(\lambda - A) : D(A) \to X$ stetig.

(b) Sei nun B als stetig vorausgesetzt. Zeigen Sie: B ist genau dann ein kleine Störung von A, wenn $\lim_{\lambda\to\infty} ||B\,\mathrm{R}(\lambda, A)|| = 0$ gilt. (4)

Lösung: Sei $||B\,\mathrm{R}(\lambda, A)|| \to 0$ für $\lambda \to \infty$. Für $x \in D(A)$ und $\lambda \in \rho(A)$ gilt

$$||Bx|| = ||B\,\mathrm{R}(\lambda, A)(\lambda - A)x|| \le ||B\,\mathrm{R}(\lambda, A)||\,||Ax|| + |\lambda|\,||B\,\mathrm{R}(\lambda, A)||\,||x||.$$

Ist also $\varepsilon > 0$ beliebig, so wählen wir $\lambda > 0$ so groß, dass $||B\,\mathrm{R}(\lambda, A)|| \le \varepsilon$ ist. Außerdem setzen wir $b = \lambda||B\,\mathrm{R}(\lambda, A)||$ Damit erhalten wir für alle $x \in D(A)$ die Abschätzung

$$||Bx|| \le \varepsilon||Ax|| + b||x||.$$

Dies zeigt, dass B eine kleine Störung von A ist.

Sei nun B eine kleine Störung von A. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es gibt ein $b_\varepsilon \ge 0$ derart, dass

$$||Bx|| \le \varepsilon||Ax|| + b_\varepsilon||x|| \quad \forall x \in D(A)$$

gilt. Für jedes $y \in X$ und jedes $\lambda \in \rho(A)$ folgt damit

$$\begin{aligned}||B\,\mathrm{R}(\lambda, A)y|| &\le \varepsilon||A\,\mathrm{R}(\lambda, A)y|| + b_\varepsilon||\,\mathrm{R}(\lambda, A)y|| \le \\ &\le \varepsilon\big(||y|| + ||\lambda\,\mathrm{R}(\lambda, A)y||\big) + b_\varepsilon||\,\mathrm{R}(\lambda, A)y||.\end{aligned}$$

Weil A Generator einer C_0-Halbgruppe ist, ist $\lambda\,\mathrm{R}(\lambda, A)$ für genügend große λ beschränkt und es gilt $||\,\mathrm{R}(\lambda, A)|| \to 0$ für $\lambda \to \infty$. Deshalb ist

$$||B\,\mathrm{R}(\lambda, A)|| \to 0 \quad (\lambda \to \infty)$$

gezeigt.

45. Sei $1 \le p < \infty$, $X = l^p$ und seien (α_n), $(\beta_n) \subset \mathbb{C}$ zwei Folgen mit folgenden Eigenschaften: (6)

(i) Es gilt $\sup_n \operatorname{Re}\alpha_n < \infty$.

(ii) Es gibt eine Nullfolge $0 \le c_n \to 0$, so dass $|\beta_n| \le c_n|\alpha_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Zeigen Sie: Der Multiplikationsoperator M_β ist auf ganz $D(M_\alpha)$ definiert, stetig bezüglich der Graphnorm auf $D(M_\alpha)$ und eine kleine Störung von M_α.

Lösung: Sei $c = \sup_n c_n$. Weil c_n konvergiert, ist $c < \infty$. Für jedes $x \in D(M_\alpha) = \{y \in l^p : ||(\alpha_n x_n||_p < \infty\}$ gilt:

$$||M_\beta x||_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n x_n|^p \le c^p||M_\alpha x_n||_p^p.$$

Damit folgt $D(M_\alpha) \subset D(M_\beta)$ und $||M_\beta x||_p \le c||M_\alpha x||_p \le c\left(||M_\alpha x||_p + ||x||_p\right)$ für alle $x \in D(M_\alpha)$. Also ist M_β stetig bezüglich der Graphnorm auf $D(M_\alpha)$.

Um zu zeigen, dass M_β eine kleine Störung von M_α ist, können wir Aufgabe 44 b) verwenden (man beachte, dass M_α Generator einer C_0-Halbgruppe ist, weil $\sup_n \operatorname{Re}\alpha_n < \infty$ vorausgesetzt wurde): Es sei $s := \sup_n \operatorname{Re}\alpha_n$. Für jedes $\lambda \in \rho(M_\alpha)$ gilt dann

$$||M_\beta \,\mathrm{R}(\lambda, M_\alpha)|| = \sup_n |\frac{\beta_n}{\lambda - \alpha_n}|.$$

Ist nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben, so wählen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $c_n \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Wir setzen $a_{n_0} := \max\{|\alpha_n| : n = 1, ..., n_0\}$ und $b_{n_0} := \max\{|\beta_n| : n = 1, ..., n_0\}$.

Nun betrachten wir ein beliebiges $\lambda \geq \max\{\frac{b_{n_0}}{\varepsilon} + a_{n_0}, 2s\}$: Wegen $\lambda \geq 2s$ ist

$$\begin{aligned} |\lambda - \alpha_n|^2 &= (\lambda - \operatorname{Re}\alpha_n)^2 + (\operatorname{Im}\alpha_n)^2 \geq (|\lambda| - |\operatorname{Re}\alpha_n|)^2 + (\operatorname{Im}\alpha_n)^2 \geq \\ &\geq (2s - s)^2 + (\operatorname{Im}\alpha_n)^2 \geq (\operatorname{Re}\alpha_n)^2 + (\operatorname{Im}\alpha_n)^2 = |\alpha_n|^2. \end{aligned}$$

Für $n \geq n_0$ folgt daraus

$$|\frac{\beta_n}{\lambda - \alpha_n}| \leq \frac{c_n|\alpha_n|}{|\alpha_n|} = c_n \leq \varepsilon.$$

Andererseits erhalten wir für $n \leq n_0$ wegen $\lambda \geq \frac{b_{n_0}}{\varepsilon} + a_{n_0}$ die Abschätzung

$$|\frac{\beta_n}{\lambda - \alpha_n}| \leq \frac{|\beta_n|}{\lambda - |\alpha_n|} \leq \frac{b_{n_0}}{\lambda - a_{n_0}} \leq \varepsilon.$$

Damit ist

$$||M_\beta \,\mathrm{R}(\lambda, M_\alpha)|| \leq \varepsilon$$

für alle $\lambda \geq \max\{\frac{b_{n_0}}{\varepsilon} + a_{n_0}, 2s\}$ gezeigt. Also folgt die Behauptung.

In der folgenden Zusatzaufgabe werden einige Aussagen aus der Funktionalanalysis wiederholt, die für die Aufgabe 47 benötigt werden (zur Bearbeitung der Aufgabe 47 benötigen Sie aber nur die angegebenen Aussagen aus Aufgabe 46 ohne Beweise).

46. (a) Seien X, Y Banachräume und sei $T : X \to Y$ linear. Zeigen Sie, dass T genau dann norm-norm-stetig ist, wenn T schwach-schwach-stetig ist. (3*)

Lösung: Der Vollständigkeit halber zeigen wir etwas mehr, nämlich das die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

(i) T ist Norm-Norm-stetig.

(ii) T ist schwach-schwach-stetig.

(iii) T ist schwach-schwach-Folgen-stetig.

„(i) ⇒ (ii)“ Sei T norm-norm-stetig und sei ein Netz $(x_i) \subset X$ gegeben, das schwach gegen ein $x \in X$ konvergiert. Ist nun $y' \in Y'$ beliebig, so gilt $\langle Tx - Tx_i, y'\rangle = \langle x - x_i, T'y'\rangle \to 0$. Also konvergiert Tx_i schwach gegen Tx.

„(ii) ⇒ (iii)“ klar.

„(iii) ⇒ (i)“ Angenommen, T wäre nicht norm-norm-stetig. Dann gibt es eine Folge $(x_k) \subset X$, die in Norm gegen Null konvergiert, und die die Eigenschaft $||Tx_k|| \to \infty$ erfüllt.

Andererseits folgt aus der Norm-Konvergenz von (x_k) die schwache Konvergenz, und folglich muss (Tx_k) schwach konvergent sein. Schwach konvergente Folgen sind aber wegen des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit beschränkt. Widerspruch.

(b) Seien X, Y wieder zwei Banachräume und sei diesmal $T : X \to Y$ ein kompakter linearer Operator. Zeigen Sie: Wenn eine Folge $(x_n) \subset X$ schwach gegen ein $x \in X$ konvergiert, dann konvergiert (Tx_n) sogar in Norm gegen Tx. (3*)

Lösung: Weil T kompakt ist, ist T norm-norm-stetig und somit nach Teilaufgabe (a) schwach-schwach-stetig. Wenn eine Folgt (x_n) schwach gegen ein $x \in X$ konvergiert, konvergiert folglich Tx_n schwach gegen Tx. Weil das Bild von T präkompakt ist, besitzt jede Teilfolge von (Tx_n) wiederum eine norm-konvergente Teilfolge, und deren Grenzwert muss gleich Tx sein. Nach dem Haarspalter-Lemma folgt, dass (Tx_n) in Norm gegen Tx konvergiert.

(c) Sei X ein reflexiver Banachraum. Zeigen Sie, dass auch jeder abgeschlossene Untervektorraum U von X reflexiv ist. (3*)

Lösung: Für jedes $\varphi \in X'$ ist $\varphi|_U \in U'$ und umgekehrt lässt sich jedes $\tilde{\varphi} \in U'$ nach dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach zu einem stetigen Funktional $\varphi \in X'$ fortsetzen. Deshalb stimmt die schwache Topologie auf U mit der Relativtopologie überein, welche die schwache Topologie auf X auf U induziert.

Weil X reflexiv ist, ist die Einheitskugel von X schwach kompakt. Zudem ist U norm-abgeschlossen und konvex, also schwach abgeschlossen. Die Einheitkugel von U ist also der Schnitt einer schwach abgeschlossenen mit einer schwach kompakten Menge, somit ebenfalls schwach kompakt in X und schließlich schwach kompakt in U. Es folgt, dass U reflexiv ist.

47. Sei X ein reflexiver Banachraum, A ein abgeschlossener Operator auf X und sei $D(A)$ mit der Graphnorm ausgestattet.

(a) Zeigen Sie, dass auch $D(A)$ reflexiv ist. (2)

Lösung: Weil X reflexiv ist, ist auch $X \times X$ reflexiv. Der Graph $G(A)$ von A ist somit als abgeschlossener Untervektorraum von $X \times X$ ebenfalls reflexiv. Es ist $G(A)$ aber isomorph zu $(D(A), ||\cdot||_A)$ und somit folgt die Behauptung.

(b) Es sei $B : D(A) \to X$ kompakt. Zeigen Sie, dass B eine kleine Störung von A ist. (5)

Tipp: Nehmen Sie widerspruchshalber an, dass B keine kleine Störung von A ist und zeigen Sie, dass es dann ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(x_n) \subset D(A)$ mit der Eigenschaft $||Bx_n|| \geq \varepsilon||Ax_n|| + n||x_n||$ gibt. Setzen Sie $y_n = \frac{x_n}{||Bx_n||}$ und untersuchen Sie das Verhalten von y_n, Ay_n und By_n, um einen Widerspruch zu finden.

Lösung: Wenn B keine kleine Störung von A wäre, dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$, so dass für kein $b \geq 0$ die Abschätzung

$$||Bx|| \leq \varepsilon||Ax|| + b||x|| \quad \forall x \in D(A)$$

erfüllt wäre. Also finden wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen Vektor $x_n \in D(A)$ mit der Eigenschaft

$$||Bx_n|| > \varepsilon||Ax_n|| + n||x_n||.$$

Wir setzen $y_n = \frac{x_n}{||Bx_n||}$ (man beachte, dass $Bx_n \neq 0$ gilt). Dann ist $||By_n|| = 1$ und es gilt

$$1 > \varepsilon||Ay_n|| + n||y_n||.$$

Also konvergiert y_n in X gegen 0 und ist in $D(A)$ beschränkt. Somit gibt es eine Teilfolge von (y_n), die in $D(A)$ schwach gegen einen Grenzwert $y \in D(A)$ konvergiert; o. E. sei (y_n) selbst diese Teilfolge. Weil die von $||\cdot||_A$ induzierte Topologie auf $D(A)$ feiner ist, als die von der X-Norm $||\cdot||$ induzierte, ist auch die von der Graphennorm induzierte schwache Topologie feiner als die von der X-Norm induzierte schwache Topologie. Somit konvergiert (y_n) auch in X schwach gegen y. Weil (y_n) aber in X sogar in Norm gegen 0 konvergiert, muss $y = 0$ gelten.

Also ist $y_n \rightharpoonup 0$, und wegen der Kompaktheit von B folgt nun, dass $By_n \to 0$ in Norm gilt. Dies widerspricht aber $||By_n|| = 1$.