Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 0

Übungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 0

1. Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ ein Operator auf X, $X \times X$ mit der Norm $||(x, y)||_1 = ||x|| + ||y||$ versehen und sei $G(A) := \{(x, Ax) : x \in D(A)\} \subset X \times X$ der Graph von A. Zeigen Sie:

(a) Es definiert $||x||_A := ||x|| + ||Ax||$ eine Norm auf $D(A)$.

(b) Die Abbildung $(D(A), ||A||) \to (G(A), ||\cdot||_1)$, $x \mapsto (x, Ax)$ ist linear, bijektiv und isometrisch (also insbesondere stetig).

(c) Es ist A genau dann abgeschlossen, wenn $D(A)$ ein Banachraum bezüglich $||\cdot||_A$ ist.

2. Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator und sei $\mu \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Wenn $\mu - A : D(A) \to X$ bijektiv ist, dann ist bereits $\mu \in \rho(A)$.

3. Sei $X = C([0, 1])$, $D(A) = C^1([0, 1])$ und $A : D(A) \to X$, $f \mapsto f'$. Zeigen Sie:

(a) A ist abgeschlossen.

(b) Der Raum $C^1([0, 1])$ ist ein Banachraum bezüglich der Norm $||f||_A := ||f||_\infty + ||f'||_\infty$.

4. Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \to X$ ein abgeschlossener Operator auf X. Man zeige:

(a) Für jedes $\mu \in \rho(A)$ und jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \mu| < \frac{1}{||\mathrm{R}(\mu,A)||}$ gilt auch $\lambda \in \rho(A)$ und

$$\mathrm{R}(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n \, \mathrm{R}(\mu, A)^{n+1}.$$

Es gilt $\operatorname{dist}(\mu, \sigma(A)) \geq \frac{1}{||\mathrm{R}(\mu,A)||}$.

(b) Die Resolventenmenge $\rho(A)$ ist offen und das Spektrum $\sigma(A)$ abgeschlossen.

(c) Im Falle $\rho(A) \neq \emptyset$ ist die Abbildung $\rho(A) \to \mathcal{L}(X)$, $\mu \mapsto \mathrm{R}(\mu, A)$ stetig.

(d) Sei $(\lambda_n) \subset \rho(A)$ eine Folge, die gegen ein $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert. Es gilt $\lambda_0 \in \sigma(A)$ genau dann, wenn $\sup_{n\in\mathbb{N}} ||\mathrm{R}(\lambda_n, A)|| = \infty$.

5. Sei $l^2 := l^2(\mathbb{N})$ und sei $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Wir definieren $D(A_\alpha) = \{(x_n) \in l^2 : (\alpha_n x_n) \in l^2\}$ und $A_\alpha : D(A_\alpha) \to l^2$, $(x_n) \mapsto (\alpha_n x_n)$. Zeigen Sie:

(a) A_α ist abgeschlossen.

(b) $D(A_\alpha)$ liegt dicht in l^2.

(c) A_α ist genau dann beschränkt, wenn die Folge (α_n) in $\mathbb{C}$ beschränkt ist.

(d) $\sigma(A_\alpha) = \overline{\{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}}$.