Übungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 3

19. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer und sei $\mathcal{D}(\Omega)$ die Menge aller beliebig oft differenzierbaren $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen, deren Träger kompakt und komplett in Ω enthalten ist. Außerdem sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p(\Omega)$. Eine Funktion $D_j f \in L^p(\Omega)$ (für $j \in \{1, ..., n\}$) heißt **schwache Ableitung** von f nach der j-ten Komponente, falls für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ die Gleichheit

$$-\int_\Omega D_j f \, \varphi = \int_\Omega f \, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}$$

gilt. Die Funktion $D_j f$ ist, falls existent, eindeutig bestimmt (modulo fast-überall-Gleichheit).

(a) Sei $W^{1,p}$ die Menge aller Funktionen $f \in L^p(\Omega)$, die nach jeder Komponenten $j \in \{1, ..., n\}$ eine schwache Ableitung $D_j f \in L^p(\Omega)$ besitzen (modulo f.ü.-Gleichheit). Zeigen Sie, dass $||f||_{W^{1,p}} = (||f||_p^p + \sum_{k=1}^n ||D_j f||_p^p)^{\frac{1}{p}}$ eine vollständige Norm auf $W^{1,p}$ definiert. (3)

Bemerkung: Den Banachraumm $(W^{1,p}, || \cdot ||_{W^{1,p}})$ nennt man auch den **ersten Sobolev-Raum** zu p.

(b) Im Falle $p = 2$ verwendet man häufig die Schreibweise $H^1 := W^{1,2}$. Zeigen Sie, dass es ein Skalarprodukt auf H^1 gibt, welches die Sobolev-Norm $|| \cdot ||_{H^1} := || \cdot ||_{W^{1,2}}$ induziert! (2)

(c) Sei $f : \Omega \to \mathbb{K}$ einmal stetig differenzierbar. Zeigen Sie: Wenn $f \in L^p$ und $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^p$ für alle $j = 1, ..., n$ gilt, so ist $f \in W^{1,p}$ und es gilt $D_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ für alle $j = 1, ..., n$. (2)

Für die Lösung der nachfolgenden Aufgabe stellen wir das folgende Resultat bereit:
Sei nun $n = 1$ und sei $\Omega = J$ ein Intervall. Wir bezeichnen die schwache Ableitung von $f \in W^{1,p}$ dann auch mit f'. Man kann zeigen

$$W^{1,p} = \{f \in C(\overline{J}) \cap L^p(J) : \exists g \in L^p(J) : f(t) - f(s) = \int_s^t g(\tau) \, \mathrm{d}\tau \; \forall s, t \in J\}.$$

Für jedes $f \in W^{1,p}$ ist das g aus obiger Menge eindeutig bestimmt, und es gilt gerade $g = f'$.

20. Sei $1 \leq p < \infty$. Wir wollen die Erkenntnisse aus den Aufgaben 16 und 17 etwas verbessern. Zeigen Sie:

(a) Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. In der Situation von Aufgabe 16 gilt dann $D(A) = W^{1,p}$ (hierbei ist $\Omega = \mathbb{R}$); außerdem ist $Af = \alpha f'$ für alle $f \in D(A)$ und es gilt $\sigma(A) = i\mathbb{R}$. (3)

(b) In der Situation von Aufgabe 17 gilt $D(A) = \{f \in W^{1,p} : f(1) = 0\}$ (hierbei ist $\Omega = (0, 1)$). Außerdem ist $Af = f'$ für alle $f \in D(A)$. (2)

21. Sei X ein Banachraum und A und abgeschlossener Operator auf X. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt **Eigenwert** von A, wenn es ein $x \in D(A) \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft $Ax = \lambda x$ gibt. In diesem Fall heißt x ein **Eigenvektor** von A zum Eigenwert λ. Die Menge aller Eigenwerte von A nennt man das **Punktspektrum** von A und kürzt sie mit $\sigma_{\mathrm{p}}(A)$ ab.

Offenbar gilt $\sigma_{\mathrm{p}}(A) \subset \sigma(A)$.

(a) Zeigen Sie den Spektralen Abbildungssatz für das Punktspektrum von Resolventen: Für jedes $\mu \in \rho(A)$ gilt $\sigma_{\mathrm{p}}(\mathrm{R}(\mu, A)) \setminus \{0\} = \frac{1}{\mu - \sigma_{\mathrm{p}}(A)}$. (1)

(b) Sei $X = l^2(\mathbb{N})$, sei $\alpha = (\alpha_n) \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Folge und sei M_α der zu α gehörende Multiplikationsoperator auf X. Zeigen Sie: $\sigma_{\mathrm{p}}(M_\alpha) = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$. (2*)

(c) Finden Sie einen Operator A auf $X = l^2(\mathbb{N}_0)$ mit $\sigma_{\mathrm{p}}(A) = \emptyset$, aber $\sigma(A) \neq \emptyset$. (2*)

(d) Sei $X = C([0, 1])$, $D(A) = C^1([0, 1])$ und $Af = f'$ für alle $f \in D(A)$. Bestimmen Sie Spektrum und Punktspektrum von A! Erzeugt A eine Halbgruppe auf X? (2*)

22. Sei X ein Banachraum und A ein abgeschlossener Operator auf X mit nichtleerer Resolventenmenge. Wir sagen, dass A kompakte Resolvente besitzt, falls für alle $\lambda \in \rho(A)$ die Resolvente $\mathrm{R}(\lambda, A)$ ein kompakter Operator ist.

(a) Zeigen Sie: A besitzt bereits dann kompakte Resolvente, wenn es ein $\lambda \in \rho(A)$ gibt, für das $\mathrm{R}(\lambda, A)$ kompakt ist. (1)

(b) Zeigen Sie: Wenn $\dim X = \infty$ gilt und A kompakte Resolvente besitzt, dann muss A unbeschränkt sein. (1)

(c) Folgern Sie aus Aufgabe 19 (a): Falls A kompakte Resolvente besitzt, so ist das Spektrum von A höchstens abzählbar und es gilt $\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A)$. (1)

(d) Sei $||\cdot||_A$ die Graphen-Norm auf $D(A)$. Zeigen Sie: A besitzt genau dann kompakte Resolvente, wenn die kanonische Injektion $(D(A), ||\cdot||_A) \hookrightarrow (X, ||\cdot||)$ kompakt ist. (2)

(e) Charakterisieren Sie, wann ein Multplikationsoperator auf $l^2(\mathbb{N})$ kompakte Resolvente besitzt! (2*)