Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 22.05.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 19+6*

Übungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 4

23. Seien X, Y Banachräume, sei $U \in \mathcal{L}(X,Y)$ ein Isomorphismus und sei $(T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X.

(a) Zeigen Sie, dass $(S(t))_{t\geq 0}$ mit $S(t) = UT(t)U^{-1}$ eine stark stetige Halbgruppe auf Y ist. (2)

(b) Sei nun $(S(t))_{t\geq 0}$ eine beliebige stark stetige Halbgruppe auf Y. Mit A und B bezeichnen wir die Generatoren von $(T(t))_{t\geq 0}$ und $(S(t))_{t\geq 0}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind: (7)

(i) $UT(t) = S(t)U$ für alle $t \geq 0$.

(ii) $D(B) = U(D(A))$ und $UAx = BUx$ für alle $x \in D(A)$.

(iii) $\exists \lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$ mit $U\,\mathrm{R}(\lambda, A) = \mathrm{R}(\lambda, B)U$.

(iv) $\rho(A) = \rho(B)$ und $U\,\mathrm{R}(\lambda, A) = \mathrm{R}(\lambda, B)U$ für alle $\lambda \in \rho(A) = \rho(B)$.

24. Sei X ein Banachraum und $(T(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X mit Generator A. Außerdem sei $X_1 := D(A)$. Dann ist X_1 zusammen mit der Graphennorm $||\cdot||_A$ ein Banachraum.

(a) Zeigen Sie, dass die Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ den Raum X_1 invariant lässt, d.h. es gilt $T(t)x \in X_1$ für alle $x \in X_1$ und alle $t \geq 0$. (1*)

(b) Für alle $t \geq 0$ sei $T_1(t) := T(t)|_{X_1}$. Zeigen Sie, dass $(T_1(t))_{t\geq 0}$ eine stark stetige Halbgruppe auf X_1 ist. (1*)

(c) Sei A_1 der Generator von $(T_1(t))_{t\geq 0}$. Zeigen Sie, dass $D(A_1) = D(A^2) := \{x \in D(A) : Ax \in D(A)\}$ und $A_1 x = Ax$ für alle $x \in D(A_1)$ gilt. (2*)

(d) Zeigen Sie: Es gilt $\rho(A_1) = \rho(A)$ und $\mathrm{R}(\lambda, A_1) = \mathrm{R}(\lambda, A)|_{X_1}$ für alle $\lambda \in \rho(A_1) = \rho(A)$. (2*)

Tipp für die Teilaufgaben (b) - (d): Nehmen Sie ohne Einschränkung an, dass $0 \in \rho(A)$ gilt und wenden Sie Aufgabe 23 auf den Isomorphismus $A^{-1} : X \to X_1$ an.

25. Sei X ein Banachraum und A ein abgeschlossener Operator auf X mit Definitionbereich $D(A)$. Zudem sei $\lambda \in \rho(A)$ und $D_0 \subset D(A)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind: (5)

(i) D_0 ist ein wesentlicher Definitionsbereich (engl. „core“) für A.

(ii) $(\lambda - A)D_0$ liegt dicht in X.

(iii) $A|_{D_0}$ besitzt den Abschluss A.

26. Sei $X = l^2(\mathbb{N})$ und sei $(T(t))_{t\geq 0}$ die Halbgruppe auf X aus Aufgabe 6, die durch $T(t)x = (e^{-nt}x_n)$ gegeben ist. Mit A bezeichnen wir den Generator von $(T(t))_{t\geq 0}$

(a) Zeigen Sie, dass $D(A) = \{x \in X : (-nx_n) \in X\}$ und $Ax = (-nx_n)$ für alle $x \in D(A)$ gilt. (3)

(b) Zeigen Sie, dass c_{00} ein wesentlicher Definitionsbereich von A ist. (2)