Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 18+10*

Übungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 5

27. Sei X ein Banachraum und $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ eine C_0-Gruppe auf X.

(a) Zeigen Sie: Wenn jeder Operator $T(t)$ (für $t \in \mathbb{R}$) eine Kontraktion ist, dann ist sogar jeder Operator $T(t)$ (für $t \in \mathbb{R}$) eine Isometrie, d.h. es gilt $||T(t)x|| = ||x||$ für alle $x \in X$. (1)

(b) Sei nun $X = H$ ein Hilbertraum. Zeigen Sie, dass ein Operator $U \in \mathcal{L}(H)$ genau dann unitär ist, wenn er isometrisch und surjektiv ist. (3)
Folgern Sie, dass für jede C_0-Gruppe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ auf H gilt: Es sind genau dann alle Operatoren $T(t)$ Kontraktionen, wenn alle Operatoren $T(t)$ unitär sind.

28. Sei H ein Hilbertraum, sei A ein selbst-adjungierter Operator auf H und sei $B \in \mathcal{L}(H)$.

(a) Zeigen Sie: $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$. *Tipp: Verwenden Sie das Theorem von Stone.* (1)

(b) Zeigen Sie: B ist genau dann selbstadjungiert, wenn B symmetrisch ist. (1)

(c) Sei B selbstadjungiert. Zeigen Sie, dass $A + B$ ebenfalls selbstadjungiert ist. (3)
Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $A+B$ symmetrisch ist. Folgern Sie, dass $\pm i(A+B)$ dissipativ ist und verwenden Sie den Störungssatz 5.1 um zu zeigen, dass $\pm i(A + B)$ m-dissipativ ist.

29. Sei H ein separabler Hilbertraum und sei A ein abgeschlossener und selbst-adjungierter Operator auf H mit nichtleerer Resolventenmenge und kompakter Resolvente.

(a) Zeigen Sie für jedes $\mu \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$, dass auch $\mathrm{R}(\mu, A)$ selbst-adjungiert ist. Folgern Sie, dass es eine Orthonormalbasis $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ von H gibt, die aus Eigenvektoren von A besteht. (4*)

(b) Sei $\{e_n, n \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von H, die aus Eigenvektoren von A besteht und sei $\lambda = (\lambda_n)$ die Folge der zugehörigen Eigenwerte. Zeigen Sie: (3*)

$$D(A) = \{x \in H : (\lambda_n\langle e_n, x\rangle) \in l^2\} \quad \text{und} \quad Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n\langle e_n, x\rangle e_n \quad \forall x \in D(A).$$

(c) Nach dem Satz von Stone erzeugt iA eine unitäre Gruppe $(T(t))_{t\in\mathbb{R}}$ auf H. Zeigen Sie, dass für jedes $x \in H$ gilt: (3*)

$$T(t)x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{i\lambda_n t}\langle e_n, x\rangle e_n.$$

Tipp: Verwenden Sie den Hilbertraum-Isomorphismus $U : H \to l^2 := l^2(\mathbb{N})$, der jedem Vektor $x \in H$ die Folge seiner Fourierkoeffizienen zuordnet.

30. Sei $H = L^2(0, 2\pi)$, sei $D(A) := \{f \in H^2(0, 2\pi) : f(0) = f(2\pi) = 0\}$ und sei $A : D(A) \to H$, $f \mapsto f''$. Es ist A ein abgeschlossener Operator und man kann (mit Hilfe eines Sobolevschen Einbettungssatzes) zeigen, dass A kompakte Resolvente besitzt.

(a) Zeigen Sie: A ist symmetrisch und es gilt $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$. Folgern Sie, dass A selbstadjungiert ist. (3)

(b) Zeigen Sie, dass jeder Eigenvektor u von A zweimal stetig differenzierbar ist. Bestimmen Sie das Spektrum von A und finden Sie eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A. (4)

(c) Geben Sie die Lösung des Cauchy-Problems (2)

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t, \cdot) = iAu(\cdot), \\ u(0, x) = \sin(\frac{x}{2}) + \sin(x) \end{cases}$$

explizit an.