Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 05.06.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 19+7*

Übungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 6

31. Sei H ein beliebiger Hilbertraum und A ein selbst-adjungierter Operator auf H mit $\sigma(A) \subset (-\infty, 0]$. Sei außerdem $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ beliebig. Zeigen Sie, dass A eine sektoriell kontraktive Halbgruppe vom Winkel θ erzeugt. (2)

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass für einen selbst-adjungierten Operator A mit $\sigma(A) \subset (-\infty, 0]$ für jedes $x \in D(A)$ die Abschätzung $\langle x, Ax\rangle \le 0$ gilt.

32. Sei $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ und sei X die Menge aller beschränkten, holomorphen, gleichmäßig stetigen Funktionen auf Σ_θ.

(a) Zeigen Sie, dass X bezüglich der Supremumsnorm ein Banachraum ist. (3)

(b) Sei $(T(t))_{t\ge 0} \subset \mathcal{L}(X)$ durch $T(t)f = f(t + \cdot)$ gegeben. Zeigen Sie, dass $(T(t))_{t\ge0}$ eine C_0-Halbgruppe auf X ist. (2)

(c) Für jedes $z \in \Sigma_\theta$ und jedes $f \in X$ setzen wir nun $T(z)f = f(z + \cdot)$. (3)
Zeigen Sie, dass die Abbildung $z \mapsto T(z)$ auf Σ_θ holomorph ist und folgern Sie, dass $(T(t))_{t\ge0}$ eine sektoriell kontraktive Halbgruppe vom Winkel θ ist.

(d) Zeigen Sie, dass $t \mapsto T(t)$ in $t = 0$ nicht stetig bezüglich der Operatornorm ist. (2)
Tipp: Betrachten Sie die Funktionen $z \mapsto \exp(-nz)$.

(e) Bestimmen Sie den Generator A von $(T(t))_{t\ge0}$. (4)

33. Sei X ein Banachraum und $(T(t))_{t\ge0}$ eine sektoriell kontraktive holomorphe Halbgruppe vom Winkel $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ mit Generator A. Zeigen Sie, dass $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\theta} \subset \rho(A)$ gilt, wobei wir $\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\theta} := \{re^{i\alpha} : r > 0, |\alpha| < \frac{\pi}{2} + \theta\}$ setzen. (3)

34. Wie in Aufgabe 30 sei $H = L^2(0, 2\pi)$, sei $D(A) = \{f \in H^2(0, 2\pi) : f(0) = f(2\pi) = 0\}$ und $A : D(A) \to H$, $f \mapsto f''$. Zeigen Sie, dass das Cauchy-Problem (7*)

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t,\cdot) = Au(t,\cdot) \\ u(0,\cdot) = u_0(\cdot) \end{cases}$$

für alle $u_0 \in D(A)$ eine Lösung besitzt und geben Sie die Lösung für die Startfunktion $u_0(x) = \sin(\frac{x}{2}) + \sin(x)$ explizit an!

Tipp für die Berechnung der Lösung: Gehen Sie ähnlich vor, wie in den Aufgaben 29 und 30. Sie dürfen hierbei verwenden, dass für $\lambda = (\lambda_n) \subset (-\infty, 0]$ der Multiplikationsoperator M_λ auf l^2 die Halbgruppe $(M_{e^{\lambda t}})$ erzeugt (wobei wir $e^{\lambda t} = (e^{\lambda_n t})$ gesetzt haben).