Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 18+11*

Übungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 8

40. Sei X ein Banachraum, A ein sektorieller Operator vom Winkel $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ und sei $(T(z))_{z\in\Sigma_\theta}$ die von A erzeugte analytische Halbgruppe auf Σ_θ, d.h. (3)

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{z\lambda}\, \mathrm{R}(\lambda, A)\, \mathrm{d}\lambda$$

für einen geeigneten Weg γ.

Zeigen Sie für $z \in \Sigma_\theta$: Es gilt $e^{z\sigma_{\mathrm{p}}(A)} \subset \sigma_{\mathrm{p}}(T(z))$, genauer: Wenn x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert μ ist, dann ist x auch ein Eigenvektor von $T(z)$ zum Eigenwert $e^{z\mu}$.

41. Sei $1 \leq p < \infty$ und $X = l^p := l^p(\mathbb{N})$. Für eine Folge $\alpha = (\alpha)_n \subset \mathbb{C}$ sei M_α der zugehörige Multiplikationsoperator auf l^p (mit kanonischem Definitionbereich).

(a) Ist M_α immer dicht definiert? Ist M_α immer abgeschlossen? (2)

(b) Zeigen Sie: Es gilt $M_\alpha \in \mathcal{L}(X)$ genau dann, wenn die Folge α beschränkt ist. Zeigen Sie weiterhin, dass in diesem Fall $||M_\alpha|| = ||\alpha||_\infty$ gilt. (3)

(c) Zeigen Sie: M_α erzeugt genau dann eine C_0-Halbgruppe auf X, wenn $\sup\{\mathrm{Re}\, \alpha_n : n \in \mathbb{N}\} < \infty$ ist. (4)

Bestimmen Sie in diesem Fall die von M_α erzeugte Halbgruppe.

(d) Sei $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Charakterisieren Sie, wann M_α sektoriell vom Winkel θ ist. (3)

(e) Sei $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Charakterisieren Sie, wann M_α eine sektoriell kontraktive Halbgruppe vom Winkel θ erzeugt. (3)

42. Sei X ein Banachraum, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2}]$ und $A \in \mathcal{L}(X)$ mit $\rho(A) \supset \Sigma_{\frac{\pi}{2}+\theta}$.

(a) Zeigen Sie: Wenn $0 \notin \sigma(A)$ gilt, dann ist A sektoriell vom Winkel θ. (4*)

Tipp: Verwenden Sie für genügend große λ die Neumann-Reihe zur Darstellung der Resolventen, um eine Abschätzung für die Resolvente zu erhalten.

(b) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Bedingung $0 \notin \sigma(A)$ aus Teilaufgabe (a) im Allgemeinen nicht weggelassen werden kann. (2*)

43. Sei $\alpha = (\alpha_n) \subset \mathbb{C}$ eine Folge mit nach rechts beschränkten Realteilen. Nach Aufgabe 41 (c) erzeugt M_α eine C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf l^p.

(a) Charakterisieren Sie an Abhängigkeit von α, wann die Gleichheit $\sigma(T(t)) = e^{t\sigma(M_\alpha)}$ für alle $t \geq 0$ gilt. (3*)

(b) Wie können Sie die Mengengleichheit aus Teilaufgabe (a) abändern, so dass sie für jede Folge $\alpha = (\alpha_n)$ mit nach rechts beschränkten Realteilen richtig ist? (2*)