Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 26.06.2013

Prof. Dr. W. Arendt
Jochen Glück
Sommersemester 2013
Punktzahl: 19+9*

Übungen Halbgruppen und Evolutionsgleichungen: Blatt 9

44. Sei X ein Banachraum und A der Generator einer C_0-Halbgruppe auf X. Außerdem sei $D(A)$ mit der Graphnorm ausgestattet und $B : D(A) \to X$ sei linear.

(a) Sei $\lambda \in \rho(A)$. Zeigen Sie: B ist genau dann stetig, wenn der Operator $B\,\mathrm{R}(\lambda, A) : X \to X$ stetig ist. (2)

(b) Sei nun B als stetig vorausgesetzt. Zeigen Sie: B ist genau dann ein kleine Störung von A, wenn $\lim_{\lambda\to\infty} ||B\,\mathrm{R}(\lambda, A)|| = 0$ gilt. (4)

45. Sei $1 \leq p < \infty$, $X = l^p$ und seien (α_n), $(\beta_n) \subset \mathbb{C}$ zwei Folgen mit folgenden Eigenschaften: (6)

(i) Es gilt $\sup_n \operatorname{Re} \alpha_n < \infty$.

(ii) Es gibt eine Nullfolge $0 \leq c_n \to 0$, so dass $|\beta_n| \leq c_n|\alpha_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Zeigen Sie: Der Multiplikationsoperator M_β ist auf ganz $D(M_\alpha)$ definiert, stetig bezüglich der Graphnorm auf $D(M_\alpha)$ und eine kleine Störung von M_α.

In der folgenden Zusatzaufgabe werden einige Aussagen aus der Funktionalanalysis wiederholt, die für die Aufgabe 47 benötigt werden (zur Bearbeitung der Aufgabe 47 benötigen Sie aber nur die angegebenen Aussagen aus Aufgabe 46 ohne Beweise).

46. (a) Seien X, Y Banachräume und sei $T : X \to Y$ linear. Zeigen Sie, dass T genau dann norm-norm-stetig ist, wenn T schwach-schwach-stetig ist. (3*)

(b) Seien X, Y wieder zwei Banachräume und sei diesmal $T : X \to Y$ ein kompakter linearer Operator. Zeigen Sie: Wenn eine Folge $(x_n) \subset X$ schwach gegen ein $x \in X$ konvergiert, dann konvergiert (Tx_n) sogar in Norm gegen Tx. (3*)

(c) Sei X ein reflexiver Banachraum. Zeigen Sie, dass auch jeder abgeschlossene Untervektorraum U von X reflexiv ist. (3*)

47. Sei X ein reflexiver Banachraum, A ein abgeschlossener Operator auf X und sei $D(A)$ mit der Graphnorm ausgestattet.

(a) Zeigen Sie, dass auch $D(A)$ reflexiv ist. (2)

(b) Es sei $B : D(A) \to X$ kompakt. Zeigen Sie, dass B eine kleine Störung von A ist. (5)
Tipp: Nehmen Sie widerspruchshalber an, dass B keine kleine Störung von A ist und zeigen Sie, dass es dann ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(x_n) \subset D(A)$ mit der Eigenschaft $||Bx_n|| \geq \varepsilon||Ax_n|| + n||x_n||$ gibt. Setzen Sie $y_n = \frac{x_n}{||Bx_n||}$ und untersuchen Sie das Verhalten von y_n, Ay_n und By_n, um einen Widerspruch zu finden.