

Vortragsthemen

Themenvorschläge aus dem Bereich Biologie

- (i) **Populationsdynamik: Räuber-Beute-Modelle.** Zur Modellierung einer Räuber-Beute-Population werden häufig die Volterra-Lotkaschen Differentialgleichungen und Abwandlungen davon verwendet. Abhängig von den Anfangsdaten kann es zum Beispiel passieren, dass die Räuber-Population ausstirbt, dass sowohl die Räuber- als auch die Beute-Population gegen ein Gleichgewicht konvergiert, oder dass Räuber- und Beute-Population sich zyklisch verhalten. In Ihrem Vortrag sollen Sie verschiedene Räuber-Beute-Modelle und deren Eigenschaften vorstellen.
- (ii) **Populationsdynamik konkurrierender Spezies.** Hier soll die Populationsdynamik zweier Spezies modelliert werden, von denen keine die andere jagt, welche aber um dieselbe Nahrungsquelle konkurrieren. Man kann zum Beispiel untersuchen, unter welchen Bedingungen ein System aus zwei konkurrierenden Spezies zu einem Gleichgewicht konvergiert. Außerdem kann man aufzeigen, dass sich eine kleine Änderung im Anfangszustand dramatisch darauf auswirken kann, ob beispielsweise eine der beiden Arten ausstirbt.
- (iii) **Modellierung von Epidemien, Immunisierung und Auswirkung von Impfungen.** Die Ausbreitung einer ansteckenden Krankheit in der Bevölkerung wird in vielen Modellen durch eine Differentialgleichung beschrieben. Um ein gutes Modell der Realität zu erstellen, müssen zahlreiche Parameter berücksichtigt werden, wie z.B. die Zahl von geimpften Individuen, die Immunisierung von bereits erkrankten und wieder genesenen Individuen, etc. In Ihrem Vortrag können Sie zum Beispiel – sowohl theoretisch als auch anhand von Computersimulationen – aufzeigen, dass die Ausbreitung einer Krankheit kritisch vom Prozentsatz der geimpften Bevölkerung abhängen kann.
- (iv) **Dynamik von Virusinfektionen und Immunantwort.** Die Infektion eines Organismus mit einem Virus kann man mathematisch modellieren, indem man z.B. die Anzahl der freien Viren, der infizierten Zellen sowie der gesunden Zellen mit Hilfe einer Differentialgleichung in Beziehung setzt. Weiterentwickelte Modelle können unter anderem auch die Immunantwort des Organismus berücksichtigen. In Ihrem Vortrag sollen Sie solche Modelle beschreiben und Aussagen über das Langzeitverhalten der Lösungen treffen.
- (v) **Differentialgleichungen in der Theorie der Nervensysteme.** Nervenzellen in einem Lebewesen kommunizieren miteinander, indem sie elektrische Potentiale über Zellfortsätze weiterleiten. Diese elektrischen Potentiale können mit Hilfe von Differentialgleichungen beschrieben werden, beispielsweise im berühmten Hodgkin–Huxley–Modell oder im etwas einfacheren FitzHugh–Nagumo–Modell. Im Vortrag sollen solche Modelle vorgestellt werden.

- (vi) **Mathematische Modelle in der Evolutionstheorie.** In der mathematischen Biologie können bestimmte Aspekte der Evolutionstheorie mit Hilfe von Differentialgleichungen modelliert werden. In solchen Modellen kann man zum Beispiel beobachten, dass die mittlere genetische Fitness einer Population im Laufe der Zeit durch natürliche Selektion zunimmt. In Ihrem Vortrag sollen Sie eines oder mehrere solcher evolutiosbiologischen Modelle vorstellen und untersuchen.

Themenvorschläge aus dem Bereich Physik

- (vii) **Modellierung und Simulation von Systemen in der klassischen Mechanik.** In der klassischen Mechanik wird die Bewegung von Objekten mit Hilfe von bestimmten Differentialgleichungen, den sogenannten *Bewegungsgleichungen* untersucht. Es gibt verschiedene Ansätze zur Herleitung solcher Bewegungsgleichungen, zum Beispiel die *Newtonschen Gleichungen*, die *Lagrangeschen Gleichungen* und die *Hamiltonschen Gleichungen*. Die letzteren beiden eignen sich insbesondere dafür, Bewegungen unter Zwangsbedingungen zu beschreiben. Im Vortrag sollen solche Bewegungsgleichungen sowohl abstrakt als auch anhand konkreter Beispiele diskutiert werden.
- (viii) **Foucaultsches Pendel und Coriolis-Kräfte.** In diesem Vortrag soll mit Hilfe von Differentialgleichungen das Prinzip der Coriolis-Kräfte erklärt werden; als veranschaulichendes Beispiel können Sie das berühmte Foucaultsche Pendel diskutieren, dessen Bewegung durch die Coriolis-Kräfte zustande kommt.
- (ix) **Simulation eines Doppelpendels.** Während die Bewegung eines üblichen Pendels periodisch abläuft und sich mathematisch leicht beschreiben und verstehen lässt, benimmt sich ein sogenanntes *Doppelpendel* (d.h. ein Pendel, welches an einem weiteren Pendel hängt) deutlich komplizierter. Ein Doppelpendel verhält sich *chaotisch*, d.h. geringste Änderungen in den Anfangsbedingungen führen schon nach kurzer Zeit zu starken Abweichungen in der Bewegung des Systems. Im Vortrag sollen die Bewegungsgleichungen von Pendel und Doppelpendel vorgestellt werden. Wichtige Eigenschaften des Pendels können Sie dann leicht anhand theoretischer Überlegungen aufzeigen, während Sie zum Beispiel eine Computersimulation benutzen können um die Bewegung eines Doppelpendels zu veranschaulichen.
- (x) **Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen und die Beschreibung einer schwingenden Saite.** Eine schwingende Saite kann, wenn man die Saite diskretisiert, näherungsweise durch eine lineare Differentialgleichung im \mathbb{R}^n beschrieben werden. Bei der Untersuchung dieser Differentialgleichung treten interessante Phänomene auf – zum Beispiel kann man einen Zusammenhang zwischen den Eigenwerten einer bestimmten Matrix und Resonanzphänomenen beobachten. Im Vortrag sollen Sie die Theorie linearer Differentialgleichungen kurz wiederholen und als Beispiel die Gleichung der schwingenden Saite im Detail vorstellen und untersuchen.

- (xi) **Modellierung elektrischer Schaltkreise.** Ein elektrischer Schaltkreis besteht üblicherweise aus Verbrauchern (= elektrischen Widerständen), Stromquellen, Kondensatoren und Spulen. Stromfluss und Spannung im Stromkreis sind aufgrund von physikalischen Gesetzen durch mehrere Differentialgleichungen miteinander gekoppelt. Im Vortrag sollen Sie diese Differentialgleichungen erläutern und verschiedene Eigenschaften ihrer Lösungen diskutieren, die einen interessanten Einblick in das Verhalten von elektrischen Schaltkreisen geben.
- (xii) **Simulation eines N -Körper-Problems.** Das N -Körper-Problem ist eines der wichtigsten dynamischen Systeme in der Himmelsmechanik: Es beschreibt, wie sich N kugelförmige Massen bewegen, die sich durch ihre Gravitation gegenseitig beeinflussen. Es gibt tiefliegende theoretische Resultate über das Langzeitverhalten eines N -Körper-Systems, die allerdings weit über unser Seminar hinausgehen. Aus diesem Grund soll der Vortrag aus einer Vorstellung des Modells, sowie aus Computersimulationen für typische N -Körper-Systeme bestehen; beispielsweise können das System aus Sonne, Mond und Erde oder die Bewegungen der Planeten im Sonnensystem simuliert werden.
- (xiii) **Swing-By-Manöver von Sonden.** In der Raumfahrt werden Sonden häufig zu Zielen geschickt, die sie direkt von der Erde aus nur erreichen könnten, wenn sie mit einer sehr großen Trägerrakete eine genügend hohe Startgeschwindigkeit erhalten würden. Um dieses Problem zu lösen, werden Swing-By-Manöver verwendet: Dabei passiert die Sonde einen der erdnahen Planeten wie Mars oder Venus, und wird beim Vorbeifliegen beschleunigt, da der Planet die Sonde mit seiner Gravitation „mitzieht“. Im Vortrag sollen die Grundlagen solcher Swing-By-Manöver erklärt und die Flugbahn von Sonden in einfachen Beispielen simuliert werden.
- (xiv) **Simulation von Satelliten-Bahnen im Erd-Potential.** Nähert man die Erde als exakt kugelsymmetrisch an (und vernachlässigt den Einfluss anderer Himmelskörper in Erdnähe), dann lässt sich der Orbit eines Satelliten leicht mit Hilfe einer Ellipse beschreiben. Tatsächlich ist die Erde aber weder genau eine Kugel, noch ist ihre Masse genau gleich verteilt. Deshalb müssen zur Berechnung von Satelliten-Bahnen genauere Daten über das Gravitationsfeld der Erde verwendet werden. Im Seminarvortrag soll ein einfaches Beispiel für ein genaueres Modell der Erde betrachtet werden: Die Erde wird hierbei als Rotationsellipsoid (d.h. als etwas abgeflachte Kugel) beschrieben und der Orbit eines Satelliten im Gravitationsfeld eines solchen Rotationsellipsoiden untersucht. Das Ergebnis kann man mit der Ellipsenbahn vergleichen, die man für eine exakt kugelförmige Erde erhalten würde.
- (xv) **Die Lorenz-Gleichung.** Im Vortrag sollen Sie die sogenannte Lorenz-Gleichung vorstellen und untersuchen. Diese Gleichung stammt aus der Meteorologie, ist aber auch aus theoretischer Sicht sehr interessant, weil sie für bestimmte Parameter chaotisches Verhalten aufweist und somit Einblicke in die Chaos-Theorie liefert.
- (xvi) **Wärmeleitung und Diffusion.** Die zeitliche Entwicklung der Temperaturverteilung eines Körpers kann mit Hilfe der sogenannten Wärmeleit-

ungsgleichung beschrieben werden, und dieselbe mathematische Gleichung taucht auch bei der Modellierung von Diffusionsprozessen auf. Im Vortrag sollen die Wärmeleitungsgleichung und einige ihrer Eigenschaften besprochen werden. Im Gegensatz zu den Modellen in den anderen Seminarthemen handelt es sich bei der Wärmeleitungsgleichung um eine *partielle Differentialgleichung*. Der Vortrag soll (und kann) jedoch nicht dazu dienen, eine Einführung in die Theorie der partiellen Differentialgleichungen zu geben. Ziel ist es stattdessen, anhand von einfachen Beispielen einen Ausblick auf ein weiterführendes Thema zu geben.

- (xvii) **Die Wellengleichung.** Im Vortrag soll die Wellengleichung vorgestellt und besprochen werden. Sie dient zur Beschreibung der räumlichen Ausbreitung von Schwingungen und spielt zum Beispiel in der Elektrodynamik eine wichtige Rolle. Wie bei Thema (xvi) gilt auch hier: Bei der Wellengleichung handelt es sich, im Gegensatz zu den Modellen, die in den anderen Themen behandelt werden, um eine partielle Differentialgleichung. Auch in diesem Vortrag können partielle Differentialgleichung nicht systematisch behandelt werden; die Wellengleichung soll lediglich beispielhaft besprochen werden, um einen Ausblick auf ein weiterführendes Thema zu geben.

Themenvorschläge aus anderen Bereichen

- (xviii) **Zeitlicher Ablauf chemischer Reaktionen.** Die Geschwindigkeit einer chemischen Reaktion hängt von der Konzentration der beteiligten Reaktanten ab. Deshalb lässt sich der Ablauf einer solchen Reaktion durch eine Differentialgleichung beschreiben. Im Vortrag sollen einige theoretische Aussagen zu solchen Gleichungen vorgestellt und Computer-Simulationen für den Ablauf verschiedener chemischer Reaktionen vorgeführt werden.
- (xix) **Dynamik von Preis- und Mengenanpassung auf einem Ein-Güter-Markt.** In einem einfachen wirtschaftlichen Modell betrachten wir einen Markt, auf dem nur ein einzelnes Gut gehandelt wird. Makroökonomische Theorien sagen dann üblicherweise aus, dass der Preis und die Gütermenge auf diesem Markt sich in einem Gleichgewicht befinden, das sich aus Angebot und Nachfrage ergibt. In Ihrem Vortrag soll ein Modell behandelt werden, das etwas weitergeht und die zeitliche Entwicklung von Preis und Gütermenge durch eine Differentialgleichung modelliert. Hier sollen Sie insbesondere auf die Konvergenz zum einem Gleichgewichtspreis und einer Gleichgewichtsmenge eingehen.

Eigene Themenvorschläge Sie können auch gerne einen eigenen Themenvorschlag machen. Wenden Sie sich dazu bitte an einen der Betreuer des Seminars.

Bemerkungen Zur Einarbeitung in Ihr Thema stellen wir Ihnen rechtzeitig Literaturvorschläge bereit. Während der Vorbereitung Ihres Vortrags können wir genauer absprechen, welche Inhalte Sie in Ihren Vortrag aufnehmen und wie Sie Ihren Vortrag aufbauen.