Seminar „Harmonische Analyse“ im Sommersemester 2015

Vortragsthemen

Im Folgenden finden Sie eine Auswahl von elf möglichen Seminarthemen, aus denen Sie wählen können. Zu jedem Thema finden sich die Information, ob sich das Thema für Lehramtstudenten, Bachelor- oder Masterstudenten eignet und welche genauen Vorkenntnisse für das Thema benötigt werden. Bitte zählen Sie sich als Masterstudent, falls Sie noch im Bachelorstudiengang eingeschrieben sind, aber ihr Seminar für das Masterstudium anrechnen lassen wollen.
Die unten stehenden Inhaltsbeschreibungen der einzelnen Themen sind nur als grober Vorschlag zu verstehen. Die genauen Details ihres Vortrages werden sich im Dialog mit den Seminar-Betreuern ergeben, wenn Sie sich auf Ihren Vortrag vorbereiten.
Bitte beachten Sie: Viele Themen eignen sich sowohl für Bachelor- als auch für Masterstudenten. Wenn Sie als Masterstudent eines dieser Themen wählen, muss der Vortrag thematisch etwas tiefgehender ausgestaltet werden.

Bei Fragen wenden Sie sich bitte an Marie-Luise Hein (marie-luise.hein@uni-ulm.de) oder an Jochen Glück (jochen.glueck@uni-ulm.de).

Thema 1: Einführung in die harmonische Analyse

Eignet sich für: Lehramtsstudenten.
Benötigte Vorkenntnisse: Analysis 1 und Lineare Algebra 1.
Inhaltsbeschreibung: Dieser Vortrag soll einen Überblick über wichtige Grundbegriffe und typische Fragestellungen der harmonischen Analyse geben. Grundlegend für die harmonische Analyse sind zum Beispiel *periodische Funktionen* und *trigonometrische Polynome*; letztere kann man als eine *Überlagerung von Schwingungen* interpretieren. Ein wichtiges Ziel der harmonischen Analyse ist es, eine periodische Funktion durch trigonometrische Polynome zu approximieren. Bei solch einer Approximation treten *Fourier-Koeffizienten* und die *Fourier-Reihe* einer Funktion auf: Ist zum Beispiel $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann ist für $n \in \mathbb{Z}$ der n-te Fourierkoeffizient $\hat{f}(n)$ von f definiert als

$$\hat{f}(n) := \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\, dx$$

und die Fourier-Reihe von f ist die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx} \quad (x \in [0, 2\pi]).$$

Im Vortrag soll die Bedeutung der Fourier-Koeffizienten und der Fourier-Reihe erklärt werden. Außerdem ist folgender Sachverhalt wichtig: Man würde erwarten, dass die Fourier-Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$ gegen die ursprüngliche Funktion $f(x)$ konvergiert. Im Seminarvortrag soll erklärt werden, wieso man dies erwartet; außerdem ist nicht klar, ob man eher mit gleichmäßiger oder nur mit punktweiser Konvergenz rechnen sollte. Im Rahmen des Vortrages sollen deshalb verschiedene Arten von Konvergenz noch einmal wiederholt und unterschieden werden.

Thema 2: Konvergenzsätze für Fourierreihen

Eignet sich für: Lehramtsstudenten.
Benötigte Vorkenntnisse: Analysis 1 und Lineare Algebra 1.
Inhaltsbeschreibung: Dieser Vortrag baut auf dem Begriff der *Fourier-Reihe* auf, der im ersten Vortrag eingeführt wurde. Nachdem im ersten Vortrag erläutert wurde, dass man für eine stetige Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ womöglich erwarten würde, dass ihre Fourier-Reihe gegen die Funktion selbst konvergiert, soll in diesem Vortrag besprochen werden, wann dies tatsächlich der Fall ist.
Man stellt hierbei fest, dass die Stetigkeit von f im Allgemeinen nicht ausreicht, um die Konvergenz der Fourier-Reihe gegen f sicherzustellen. Wenn man aber zusätzliche Regularitäts-Bedingungen an f stellt (zum Beispiel genügend häufige Differenzierbarkeit), dann erhält man die gewünschte Konvergenz; dies soll im Vortrag bewiesen werden. Außerdem kann im Vortrag auch der Satz von Fejér erwähnt werden. Dieser zeigt, dass eine etwas abgeänderte Version der Fourier-Reihe immer gleichmäßig gegen f konvergiert (dieser Satz wird in einem anderen Seminar-Vortrag bewiesen werden). Zudem ist es interessant, ein Beispiel einer stetigen Funktion f anzugeben, deren Fourier-Reihe nicht gegen f konvergiert; ein solches Beispiel kann ebenfalls im Rahmens des Vortrages konstruiert werden.

Thema 3: Einführung in die Theorie der Hilberträume

Eignet sich für: Bachelorstudenten.
Benötigte Vorkenntnisse: Analysis 1/2, Lineare Algebra 1 und Maßtheorie.
Inhaltsbeschreibung: Ziel dieses Vortrags ist es, die Theorie der Fourier-Reihen in einen allgemeineren Kontext zu stellen. Dazu führt man den Begriff des *Hilbertraumes* ein. Endlich-dimensionale Hilberträume kennen sie bereits aus der Linearen Algebra - es handelt sich hier einfach um endlich-dimensionale Vektorräume, die mit einem Skalarprodukt ausgestattet sind. Dieselbe Definition kann man auch für allgemeine (unendlich-dimensionale) Vektorräume verwenden und erhält dann einen allgemeinen Hilbertraum.
Hilberträume besitzen eine sehr elegante Struktur-Theorie und verhalten sich in vielerlei Hinsicht ähnlich wie ihr endlich-dimensionales Analogon. Im Vortrag sollen die wichtigsten Struktureigenschaften von Hilberträumen vorgestellt werden (z.B. *Orthogonalität* und *Entwicklung eines Vektors in einer Orthonormal-Basis*). Als besonders wichtige Beispiele sollen der Raum aller quadrat-summierbaren Folgen und der Raum aller quadrat-integrierbaren Funktionen vorgestellt werden.
Zum Abschluss des Vortrags soll die Theorie der Hilberträume auf Fourier-Reihen angewendet werden: Es stellt sich heraus, dass die Fourier-Reihe einer quadrat-integrierbaren Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ im quadratischen Mittel immer gegen f konvergiert, und der Beweis dieses Satzes ist eine einfache Anwendung eines allgemeinen Hilbertraum-Resultats.

Thema 4: Faltung von Funktionen und der Satz von Fejér

Eignet sich für: Bachelor- und Masterstudenten.
Benötigte Vorkenntnisse: Analysis 1/2, Lineare Algebra 1 und Maßtheorie.
Inhaltsbeschreibung: In diesem Vortrag soll der wichtige Begriff der *Faltung* für Folgen und Funktionen eingeführt werden. Es bezeichne $l^1(\mathbb{Z})$ die Menge

aller Folgen $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit der Eigenschaft $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| < \infty$. Dann kann man für zwei Folgen $x, y \in l^1(\mathbb{Z})$ die Folge $x \star y$ definieren, die durch

$$(x \star y)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} y_k$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ gegeben ist. Man bezeichnet $x \star y$ als *Faltung* von x und y. Die Faltung besitzt zahlreiche interessante Eigenschaften: Zum Beispiel ist sie kommutativ und assoziativ. Darüber hinaus kann man zeigen, dass $l^1(\mathbb{Z})$ zusammen mit der Faltung eine sogenannte *Algebra* bildet. Außerdem gilt für alle $x \in l^1(\mathbb{Z})$ die Gleichung $x \star e = x$, wobei die Folge $e \in l^1(\mathbb{Z})$ durch

$$e_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist. Man sagt deshalb auch, dass e ein *neutrales Element* oder eine *Eins* bezüglich der Faltung ist. Abgesehen von diesen interessanten Eigenschaften der Faltung gibt es einen wichtigen Zusammenhang zwischen der Faltung und der Fourier-Transformation, welcher im Vortrag vorgestellt werden soll.
Eine Faltung kann man nicht nur auf dem Folgenraum $l^1(\mathbb{Z})$ definieren, sondern analog auch auf dem Raum $L^1(\mathbb{R})$ aller integrierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ (wobei man hier die Summation durch ein Integral ersetzt). Auf diesem Raum besitzt die Faltung allerdings kein neutrales Element mehr, weshalb man stattdessen sogenannte *approximative Einsen* betrachtet. Dies sind Folgen, die in gewissem Sinne ein neutrales Element der Faltung ersetzen können. Die Betrachtung dieser Folgen führt in natürlicher Weise zum *Satz von Fejér*, der im Vortrag bewiesen werden soll.

Thema 5: Die Fourier-Transformation auf $\mathbb{R}$ and der Satz von Plancherel

Eignet sich für: Bachelor- und Masterstudenten.
Benötigte Vorkenntnisse: Analysis 1/2, Lineare Algebra 1 und Maßtheorie.
Inhaltsbeschreibung: Nachdem in den ersten Vorträgen Funktionen Fourier-Reihen von Funktionen auf beschränkten Intervallen behandelt wurden, sollen in diesem Vortrag Funktionen im Mittelpunkt stehen, die auf der ganzen reellen Achse definiert sind. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, dann definiert man für jedes $\omega \in \mathbb{R}$

$$\hat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x}\, dx.$$

Dadurch erhält man eine neue Funktion $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, welche man als *Fourier-Transformierte* von f bezeichnet. Anders als bei Funktionen, die auf kompakten Intervallen definiert sind, betrachtet man also nicht mehr nur abzählbar viele Fourier-Koeffizienten, sondern man erhält für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ einen Fourier-„Koeffizienten". Entsprechend kann man die ursprüngliche Funktion f aus $\hat{f}$ nicht mehr mit Hilfe einer Reihe rekonstruieren, sondern mit Hilfe eines Integrals, dass heißt man würde eine Formel der Art

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega$$

erwarten (bis auf einen Korrekturfaktor, der im Rahmen des Vortrags ebenfalls erläutert werden soll). Die Frage, für welche f die obige *Umkehrformel* tatsächlich gilt, führt auf die Idee, zuerst eine bestimmte Klasse von Funktionen zu betrachten, die sogenannten *Schwartz-Funktionen.* Für solche Funktionen gelten viele interessante Eigenschaften der Fourier-Transformierten, welche im Vortrag vorgestellt und bewiesen werden sollen. Außerdem erhält man aus diesen Eigenschaften den *Satz von Plancherel* als Korollar, der sagt, dass die Fourier-Transformation zu einer bijektiven (und *isometrischen*) Abbildung auf dem Raum aller quadrat-integrierbaren Funktionen fortgesetzt werden kann.

Thema 6: Die Fourier-Transformation in der Quantenmechanik

Eignet sich für: Bachelor- und Masterstudenten.
Benötigte Vorkenntnisse: Analysis 1/2, Lineare Algebra 1, gewöhnliche Differentialgleichungen, Maßtheorie und eine Grundvorlesung über Mechanik oder Quantenmechanik; evtl. eine Einführungsveranstaltung in Funktionalanalysis.
Inhaltsbeschreibung: In diesem Vortrag soll gezeigt werden, wie die Fourier-Transformation in der Quantenmechanik Anwendung findet. Dazu soll zunächst ein grober Überblick über die grundlegenden Ideen der Quantenmechanik gegeben werden. Anschließend kann erläutert werden, inwiefern man den Ort und den Impuls eines Teilchens mit Hilfe einer *Wellenfunktion* beschreiben kann, und wie diese Wellenfunktion physikalische interpretiert wird. Die zentrale Erkenntnis im Kontext dieses Seminars ist es, dass die Wellenfunktion, die den Impuls eines Teilchens beschreibt, die Fourier-Transformierten der Orts-Wellenfunktion ist. Dies soll im Vortrag ausführlich besprochen werden. Als Anwendung kann im Anschluss zum Beispiel die *Heisenbergsche Unschärfe-Relation* bewiesen werden. Aus mathematischer Sicht besagt diese, dass eine Funktion und ihre Fouier-Transformierte nicht gleichzeitig auf einem kleinen Bereich von $\mathbb{R}$ lokalisiert sein können. Aus physikalischer Sicht besagt sie, dass Ort und Impuls eines Teilchens nicht gleichzeitig beliebig genau bestimmt werden können; die Heisenbergsche Unschärfe-Relation beschreibt damit eine überraschende (und grundlegende) Beobachtung der modernen Physik.

Thema 7: Das Abtast-Theorem von Nyquist-Shannon

Eignet sich für: Bachelor- und Masterstudenten.
Benötigte Vorkenntnisse: Analysis 1/2, Lineare Algebra 1 und Maßtheorie.
Inhaltsbeschreibung: In der Signalverarbeitung werden Signale üblicherweise als Überlagerung von Wellen beschrieben; die mathematische Rechtfertigung hierfür liefert die Darstellung der Signal-beschreibenden Funktion als Fourier-Reihe bzw. Fourier-Integral. Man nennt ein Signal *bandbeschränkt*, falls die Frequenzen der Wellen, aus denen sich das Signal zusammensetzt, in einem beschränkten Intervall liegen. Da in der technischen Umsetzung alle Signale bandbeschränkt sind, bzw. als bandbeschränkt angenähert werden, ist dieser Begriff von großer praktischer Bedeutung.
Wenn nun ein Empfänger ein Signal verarbeiten soll, so kann häufig nicht das gesamte, zeit-kontinuierliche Signal verarbeitet werden, sondern das eintreffende Signal kann nur zu diskreten Zeitpunkten ausgewertet („*abgetastet*“) werden. Das Abstast-Theoremvon Nyquist-Shannon gibt an, wie groß die Abtast-Frequenz sein muss, um das ursprüngliche Signal hinterher vollständig rekon-

struieren zu können. Im Seminarvortrag soll das Abtast-Theorem bewiesen und seine anschauliche Bedeutung erläutert werden. Außerdem soll die oben skizzierte Bedeutung der Fourier-Transformation in der Signaltechnik besprochen werden.

Thema 8: Übergangsfunktionen linearer Systeme

Eignet sich für: Bachelor- und Masterstudenten.
Benötigte Vorkenntnisse: Analysis 1/2, Lineare Algebra 1, gewöhnliche Differentialgleichungen und Maßtheorie; evtl. eine Einführungsveranstaltung in Funktionalanalyis.
Inhaltsbeschreibung: In den Ingenieurswissenschaften werden häufig sogenannte *Systeme* betrachtet, die eine *Eingabefunktion* empfangen und darauf mit einer *Ausgabefunktion* antworten. Konkret kann es sich bei dem System zum Beispiel um eine mechanische Konstruktion (etwa ein Gebäude) handeln; die Eingabefunktion könnte eine Erschütterung des Gebäudes beschreiben und die Ausgabefunktion die Vibration des Gebäudes aufgrund der Erschütterung. Eine anderes Beispiel ist ein Klangkörper, der durch einen Ton angeregt wird und daraufhin selbst klingt.
Häufig ist es sinnvoll anzunehmen, dass der Zusammenhang zwischen Eingabe- und Ausgabefunktion (näherungsweise) linear ist. Zudem ist es naheliegend, dass die Reaktion des Systems mit Zeitverschiebungen kommutiert, d.h. wenn die Eingabefunktion um T Zeiteinheiten später eintrifft, dann erwartet man, dass die Ausgabefunktion ebenfalls um T Zeiteinheiten verschoben wird, aber ansonsten unverändert ist. Diese beiden Annahmen sind beispielsweise erfüllt, wenn der Zusammenhang zwischen Eingabe- und Ausgabefunktion durch eine Faltung beschrieben werden kann, d.h. wenn es eine Funktion u gibt derart, dass jede Eingabefunktion f vom System in die Ausgabefunktion $u \star f$ überführt wird. Wenn man die Ein- und Ausgabefunktion sowie die Übergangsfunktion des Systems Fourier-transformiert, so erhält man eine besonders einfache Beschreibung des linearen Systems. Dies ist einer der Gründe für die große Bedeutung der Fourier-Transformation in den Ingenieurswissenschaften.
Im Vortrag soll auch ein konkretes Beispiel eines solchen linearen Systems besprochen werden. Zum Beispiel kann man einen harmonischen Oszillator betrachten, der durch eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben wird. Regt man diesen Oszillator durch eine Schwingung (= Eingabefunktion) an, so schwingt er eigenständig weiter, was der Ausgabefunktion entspricht. Die zugehörige Übergangsfunktion bezeichnet man auch als *Greensche Funktion* der Differentialgleichung.

Thema 9: Die isoperimetrische Ungleichung in zwei Dimensionen

Eignet sich für: Bachelorstudenten.
Benötigte Vorkenntnisse: Analysis 1/2 und Lineare Algebra 1.
Inhaltsbeschreibung: Eine klassische Frage der Mathematik beschäftigt sich mit dem Verhältnis von Umfang und Fläche zwei-dimensionaler geometrischer Figuren. Fixiert man zum Beispiel den Umfang einer solchen Figur, so kann man zeigen, dass die Fläche genau dann maximal ist, wenn es sich um einen Kreis handelt. Diese Aussage bezeichnet man auch als *isoperimetrische Ungleichung*. Ein möglicher Beweis dieses Satzes basiert (für den Fall, dass der Rand der

Figur genügend glatt ist) auf harmonischer Analyse: Indem man den Rand der Figur parametrisiert und die Fourier-Reihe der parametrisierenden Funktion berechnet, kann man zeigen, dass die Fläche eines Kreises tatsächlich größer ist, als die Fläche jeder anderen Figur mit gleichem Umfang. Dieser Beweis soll im Seminarvortrag detailliert vorgestellt werden.

Thema 10: Die Wärmeleitungsgleichung

Eignet sich für: Bachelor- und Masterstudenten.
Benötigte Vorkenntnisse: Analysis 1/2, Lineare Algebra 1, gewöhnliche Differentialgleichungen und Maßtheorie; evtl. eine Einführungsveranstaltung in Funktionalanalysis.
Inhaltsbeschreibung: Man betrachte einen Gegenstand, der aus einem vorgegebenen Material besteht und welcher eine uns bekannte Temperaturverteilung aufweist. Wenn die Temperatur nicht gleichmäßig verteilt ist, wird sie sich solange im Körper ausbreiten, bis eine gleichmäßige Verteilung erreicht ist. Eine klassische Aufgabe in der Thermodynamik ist es, den zeitlichen Ablauf dieser *Wärmeleitung* zu beschreiben. Aus grundlegenden physikalischen Gesetzen lässt sich eine Differentialgleichung herleiten, welche die Wärmeleitung mathematisch beschreibt; im Vortrag soll diese Herleitung skizziert werden.
Um die Wärmeausbreitung tatsächlich zu berechnen, muss die Wärmeleitungsgleichung gelöst werden. Diese ist mit Hilfe von harmonischer Analyse möglich; in der Tat war die Lösung der Wärmeleitungsgleichung die ursprüngliche Motivation von Fourier zur Betrachtung der später nach ihm benannten Fourier-Reihen. Dieser Lösungsansatz soll im Seminar dargestellt werden. Außerdem kann man mit dieser Technik Aussagen über das Langzeitverhalten der Lösung treffen; auf diese Weise lässt sich mathematisch zeigen, was man auch anschaulich erwarten würden - die Lösung konvergiert für große Zeiten gegen eine Gleichverteilung.
Zusätzlich könnte man in diesem Vortag auch knapp auf den Zusammenhang zwischen Fourier-Reihen und den Spektraleigenschaften des Laplace-Operators eingehen.

Thema 11: Mathematische Beschreibung einer schwingenden Saite

Eignet sich für: Bachelor- und Masterstudenten.
Benötigte Vorkenntnisse: Analysis 1/2, Lineare Algebra 1, gewöhnliche Differentialgleichungen, Maßtheorie und eine Einführungsveranstaltung in Funktionalanalysis.
Inhaltsbeschreibung: Man stelle sich die Saite eines Streichinstruments vor, die an beiden Enden eingespannt ist. Lenkt man die Saite in der Mitte aus, so beginnt sie zu schwingen (und damit einen Ton zu erzeugen). Im Vortrag soll skizziert werden, wie man eine Differentialgleichung zur Beschreibung der schwingenden Saite aus physikalischen Gesetzen herleiten kann.
Diese Differentialgleichung bezeichnet man als *Wellengleichung*; es handelt es sich dabei um eine sogenannte *hyperbolische partielle Differentialgleichung.* Mit Hilfe von harmonischer Analyse kann man die Lösungen dieser Gleichung bestimmen. Eine wichtige Rolle in der Wellengleichung spielt der *Laplace-Operator*. Die Frequenzen, die in der Fourier-Reihe für die Lösung der Wellengleichung auftreten hängen eng mit Spektraleigenschaften des Laplace-Operators zusammen.

Dieser Zusammenhang soll im Vortrag erläutert werden.
Eventuell kann im Vortrag auch kurz auf mehrdimensionale Verallgemeinerungen der schwingenden Saite eingegangen werden. Ein bekanntes Problem in diesem Gebiet ist die Frage, ob man „Die Form einer Trommel hören“ kann - mathematisch gesprochen ist dies die Frage, ob zwei Gebiete, auf denen die Wellengleichung dieselben Frequenzen besitzt, automatisch kongruent sind. Auch diese Frage kann am Ende des Vortrags kurz als Ausblick angesprochen werden.