Universität Ulm

Abgabe: Donnerstag, 04.05.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Jochen Glück
Sommersemester 2017
Punktzahl: 10

Übungen Analysis 1: Blatt 2

Für dieses Blatt und alle nachfolgenden Blätter definieren wir $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, ...\}$, d.h. $\mathbb{N}_0$ enthält genau alle natürlichen Zahlen und die 0.

1. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$. (1)

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Wenn $x + x = 0$ gilt, dann ist $x = 0$. (1)

(c) Sei K ein Körper und $x \in K$. Wenn $x + x = 0$ gilt, dann ist $x = 0$. (1)

2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jedes $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ haben Sie in der Vorlesung den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ definiert. Außerdem definiert man $\binom{0}{0} := 1$, sodass also $\binom{n}{k}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ definiert ist.

(a) Zeigen Sie: Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ gilt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. (2)

(b) Zeigen Sie: Für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$ gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. (1)

3. Sei K ein Körper mit nur endlich vielen Elementen. Für jedes $x \in K$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $nx := \sum_{k=1}^{n} x$.

(a) Sei $x \in K$. Zeigen Sie, dass es zwei verschiedene Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gibt, für welche $mx = nx$ gilt. (1)

(b) Sei $x \in K$. Zeigen Sie, dass es eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $nx = 0$ gibt. (1)

(c) Zeigen Sie, dass es keine Ordnungsrelation auf K gibt, die K zu einem angeordneten Körper macht. (2)

Bitte umblättern!

Weitere Aufgaben für Sie zum Üben:

4. (a) Gilt die Binomialformel aus der Vorlesung auch für $n = 0$?

(b) Zeigen Sie, dass $\binom{n}{n} = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(c) Seien $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$. Zeigen Sie, dass $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ gilt.

(d) Benutzen Sie die Teilaufgaben (b) und (c), um per Hand – aber möglichst effizient – für alle Tupel (n, k) mit $n \in \{0, 1, 2, ..., 7\}$ und $k \in \{0, ..., n\}$ den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ zu bestimmen.

5. (a) Finden Sie eine mengentheoretische Interpretation der Aussage in Aufgabe 2(b) auf diesem Blatt.

(b) Eine endliche Menge M habe n Elemente. Wieviele Teilmengen besitzt M?

6. Sie $p \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die beiden Summen

$$\sum_{k=0}^{n} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \text{and} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$