Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 19.05.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Jochen Glück
Sommersemester 2017
Punktzahl: 10

Übungen Analysis 1: Blatt 4

1. (a) Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\overline{\lim}_{k\to\infty} x_k = -\underline{\lim}_{k\to\infty}(-x_k)$ gilt. (2)

(b) Wir definieren $y_n := (-1)^n + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist und bestimmen Sie $\overline{\lim}_{n\to\infty} y_n$ und $\underline{\lim}_{n\to\infty} y_n$. (2)

2. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und sei $x \in \mathbb{R}$. Wir definieren $c_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, dann konvergiert auch $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x. (2)

(b) Wenn $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, dann konvergiert auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x. (2)

3. Sei $q \in [0, 1)$ und $c \geq 0$. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, welche die Bedingung $|a_{n+1} - a_n| \leq cq^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. (2)

Bitte umblättern!

Weitere Aufgaben für Sie zum Üben:

4. Sie $x \in \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, ob die Folge $(\frac{x^n}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert.

5. Hans Häuslebauer eröffnet am 01.01.2017 ein Sparbuch. Zum ersten Januar eines jeden Jahres (beginnend am 01.01.2017) zahlt er einen festen Betrag B auf sein Sparbuch ein. Jeweils am 31.12. jedes Jahres wird das Guthaben des Sparbuches mit einem festen Zinssatz $q \geq 0$ verzinst. Der Zins wird dem Guthaben auf dem Sparbuch gutgeschrieben.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Geben Sie eine geschlossene Formel für das Guthaben an, welches Herr Häuslebauer auf seinem Sparbuch n Jahres nach dessen Eröffnung vorfindet.

Hinweise:

(a) Mit dem Guthaben n Jahre nach Eröffnung des Sparbuches ist genauer gemeint: Das Guthaben, das sich um Mitternacht zwischen Silvester $2017+n-1$ und Neujahr $2017+n$ auf dem Sparbuch befindet.

(b) Der Zinssatz q ist so zu verstehen, dass ein Guthaben G einen Zins von $q \cdot G$ erzielt. Anders ausgedrückt: Der Zinssatz beträgt also $100 \cdot q$ Prozent.

6. (a) Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ und sei $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass die Folge $(n^k q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

(b) Zeigen Sie: Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ konvergiert die Folge $\left(\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\right)_{n\geq k}$ gegen 0.

(c) Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ sei eine reelle Zahl $c_k \geq 0$ gegeben und es gelte $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{2^n}\binom{n}{k} = 0$$

gilt.

Hinweis: Die Teilaufgabe (c) ist ein bisschen knifflig!