Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 26.05.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Jochen Glück
Sommersemester 2017
Punktzahl: 10

Übungen Analysis 1: Blatt 5

1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine reelle Folge und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sei konvergent.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ die Reihe $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ ebenfalls konvergiert. (1)

(b) Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $f_m := \sum_{n=m}^{\infty} a_n$. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ gegen Null konvergiert. (1)

2. Entscheiden Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$ konvergiert. (4)

3. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende reelle Folge und sei $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Beweisen Sie, dass genau dann $\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$ gilt, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} < \infty$ gilt. (4)

Bitte umblättern!

Weitere Aufgaben für Sie zum Üben:

4. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine reelle Folge und es gelte $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert.

5. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ konvergiert.

(b) Die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k!}{k^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(c) Die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{3^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(d) Die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{3^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

6. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $p_n \in \mathbb{N}$ die n-te Primzahl, d.h. es sei $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, etc. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$?