Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 02.06.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Jochen Glück
Sommersemester 2017
Punktzahl: 10

Übungen Analysis 1: Blatt 6

1. (a) Berechnen Sie i^n für alle $n \in \mathbb{N}$. (1)

(b) Berechnen Sie $|(-\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i)^{2017}|$. (1)

(c) Finden Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche der Gleichung $z^2 = 2i$ genügen. (2)

(d) Finden Sie alle $z \in \mathbb{C}$, welche der Gleichung $z^2 - 2z - 2i + 1 = 0$ genügen. (1)

2. Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt *von beschränkter Variation*, falls $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty$ gilt. Laut Aufgabe 4 auf Blatt 5 ist eine reelle Folge von beschränkter Variation automatisch konvergent.

(a) Zeigen Sie: Jede reelle Folge, die monoton fallend und beschränkt ist, ist von beschränkter Variation. (1)

(b) Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Nullfolge von beschränkter Variation, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$. (2)
Bemerkung: Diese Aussage ist eine Verallgemeinerung von Satz 12.8 aus der Vorlesung.

3. Es bezeichne $i\mathbb{R} := \{iy : \ y \in \mathbb{R}\}$ die sogenannte *imaginäre Achse* in $\mathbb{C}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt $z^{-1} = \overline{z}$. (1)

(b) Sei $z \in \mathbb{C}$. Es gilt $z \in i\mathbb{R}$ genau dann, wenn $z = -\overline{z}$ ist. (1)

Bitte umblättern!

Weitere Aufgaben für Sie zum Üben:

4. Üblicherweise skizziert man die Menge aller komplexen Zahlen als Ebene (die sogenannte *Gaußsche Zahlenebene*, häufig auch einfach *komplexe Zahlenebene* genannt); jede komplexe Zahl $z = x + iy$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) entspricht hier einem Punkt in der Ebene, wobei der Realteil $\operatorname{Re} z = x$ die Rechtswert-Koordinate des Punktes z und der Imaginärteil $\operatorname{Im} z = y$ die Hochwert-Koordinate des Punktes z ist.

Skizzieren Sie die folgenden Zahlen $z \in \mathbb{C}$ in der komplexen Zahlenebene und zeichnen Sie auch den Betrag $|z|$ in ihre Skizze ein.

(a) $z = 1 + 2i$.

(b) $z = 1 - i$.

(c) $z = -3$.

(d) $z = i$.

(e) $z = 0 + 1 \cdot i$.

(f) $z = 0$.

5. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k} x^k$?

6. Sei $x \in \mathbb{R}$.

(a) Beweisen Sie, dass $e^x \neq 0$ ist und dass $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$ gilt.

(b) Sei $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass $(e^x)^n = e^{nx}$ gilt.

7. Finden Sie eine konvergente reelle Folge, die nicht von beschränkter Variation ist.