Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 07.07.2017

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Jochen Glück
Sommersemester 2017
Punktzahl: 10

Übungen Analysis 1: Blatt 11

1. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar. Zeigen Sie, dass das Produkt fg ebenfalls n-mal differenzierbar ist und dass die Formel (3)

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

gilt. Hierbei benutzen wir die Notation $f^{(0)} := f$ und $g^{(0)} := g$.

2. Betrachten Sie die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, die durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar ist. (3)

(b) Ist f stetig? (1)

3. Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = xe^{-x}$ für alle $x \in [0, \infty)$ gegeben. Zeigen Sie, dass $f(x) \leq \frac{1}{e}$ für alle $x \in [0, \infty)$ gilt. (3)

Bitte umblättern!

Weitere Aufgaben für Sie zum Üben:

4. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$. Wenn f zweimal differenzierbar ist, dann ist f einmal stetig differenzierbar.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, sei $x_0 \in (a, b)$ und sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Wenn f in x_0 ein isoliertes lokales Minimum besitzt, dann gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.

(c) Sei $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $f(x) \neq 0$ für alle $x \in (-\infty, 0]$. Wenn $f(0) < 0$ gilt, dann gilt sogar $f(x) < 0$ für alle $x \in (-\infty, 0]$.

(d) Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $f(x) > 0$ für alle $x \in [0, 1]$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft $f(x) \geq \varepsilon$ für alle $x \in [0, 1]$.

(e) Sei $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ stetig und sei $f(x) > 0$ für alle $x \in (0, 1)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit der Eigenschaft $f(x) \geq \varepsilon$ für alle $x \in (0, 1)$.

(f) Seien $f, g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und es gelte $f' = g'$ sowie $f(0) = g(0)$. Dann ist $f = g$.

5. Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und sei $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Zeigen Sie: Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $y \in (0, \infty)$ mit $|f'(y)| < \varepsilon$.