Universität Ulm

Bearbeitungszeit: 180 Minuten

Alle Aussagen sind zu begründen!

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Jochen Glück
Sommersemester 2017
Punktzahl: 100

Erste Klausur zur Analysis 1

1. Beweisen oder widerlegen Sie: (6×5)

(a) Sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer und beschränkt. Dann gilt $\inf A \leq \sup A$.

(b) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Wenn $f(0) < 5$ und $f(1) > 5$ gilt, dann gibt es ein $x_0 \in [0,1]$ mit $f(x_0) = 5$.

(c) Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und sei $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [-1,1]$. Dann gilt $f(x) \leq 0$ für alle $x \in [-1,1]$.

(d) Sei $z = 1 + i \in \mathbb{C}$. Dann gibt es ein $\varphi \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $z = \sqrt{2}e^{i\varphi}$.

(e) Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge und sei $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge. Dann ist die Folge $(a_k b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergent.

(f) Sei $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ für alle $x \in [1,2]$. Dann gibt es ein $x_0 \in [1,2]$ mit $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in [1,2]$.

2. Untersuchen Sie die Folgen in (a) und (b) auf Konvergenz. (5+5)

(a) $\left(\frac{\cos(3^n)}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(b) $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k!)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

3. Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ die Ungleichung $\ln(k!) \geq k - 2$. (10)

4. Zeigen Sie, dass (10)

$$\int_0^1 x^{2017} e^{x^2}\, dx = \frac{e}{2018} - \frac{2}{2018} \int_0^1 x^{2019} e^{x^2}\, dx$$

gilt.

5. Zeigen Sie, dass es keine Folge in der Menge $\mathbb{N}$ gibt, die gegen $\frac{7}{2}$ konvergiert. (10)

6. Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = (x+1)e^{-2x}$ für alle $x \in [0,\infty)$ gegeben. (10+5)

(a) Zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in [0,\infty)$ mit der Eigenschaft $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in [0,\infty)$ gibt.

(b) Bestimmen Sie ein x_0 mit der in (a) beschriebenen Eigenschaft.

7. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \sin(x^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Finden Sie eine reelle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ derart, dass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert. (5)

8. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$ gilt. (10)