Universität Ulm

Bearbeitungszeit: 180 Minuten

Alle Aussagen sind zu begründen!

Prof. Dr. Wolfgang Arendt
Dr. Jochen Glück
Sommersemester 2017
Punktzahl: 100

Zweite Klausur zur Analysis 1

1. Beweisen oder widerlegen Sie: (6×5)

(a) Es gilt $\sum_{k=0}^{2017} \binom{2017}{k} (-\frac{1}{2})^k \geq 0$.

(b) Sei $f : [2,3] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Falls f in 2 ein lokales Minimum hat, dann gilt $f'(2) = 0$.

(c) Seien $f, g : [0,3] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt $\int_0^3 f(t)g(t)\,dt = \int_0^3 f(t)\,dt \cdot \int_0^3 g(t)\,dt$.

(d) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = x + \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann ist f surjektiv.

(e) Die Folge $\left(\frac{k+\sin k}{2k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\frac{1}{2}$.

(f) Die Menge $\{1 + \frac{1}{2m} : m \in \mathbb{N}\}$ besitzt ein Maximum.

2. Sei $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} k(iz)^k$ konvergiert, falls $|z| < 1$ ist und sie divergiert, falls $|z| \geq 1$ ist. (10)

3. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{n+1}\right)$ gilt. (10)

4. Seien $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und sei $f(0) = g(0)$. Zeigen Sie: Wenn $f'(x) \leq g'(x)$ für alle $x \in [0,1]$ gilt, dann ist $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [0,1]$. (10)

5. Für $n \in \mathbb{N}$ sei (10)

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{n/2} & \text{falls } n \text{ gerade ist.} \\ \frac{n}{n+1} & \text{falls } n \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass 2 kein Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

6. Sei $f : [1,e] \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{x}{2}$ gegeben. (9+6)

(a) Berechnen Sie die Ableitung f' und zeigen Sie, dass es ein $x_0 \in (1,e)$ mit $f'(x_0) = 0$ gibt.

(b) Sei x_0 wie in (a). Zeigen Sie, dass f bei x_0 ein lokales Maximum besitzt.

7. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \cos(e^x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass f nicht injektiv ist. (5)

8. Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$ und $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$. (10)