Dr. Jochen Glück
Marius Müller
Fabian Rupp
Sommersemester 2017
Punktzahl: 10

Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 05.05.2017

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 2

4. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{K}$ eine stetige Funktion. Für $f \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{K})$ setze

$$(Tf)(x) := \int_0^1 k(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Zeigen Sie, dass $Tf : [0,1] \to \mathbb{K}$ stetig ist. (2)

(b) Zeigen Sie, dass $T : \mathcal{C}([0,1];\mathbb{K}) \to \mathcal{C}([0,1];\mathbb{K}),\ f \mapsto Tf$ eine stetige lineare Abbildung definiert, wobei wir $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{K})$ als normierten Raum mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$ betrachten. (2)

Seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume. Für stetige lineare Abbildung $S : V \to W$ ist die *Operator-Norm von S* gegeben durch

$$\|S\| := \inf\left\{C \geq 0 : \|Sv\|_W \leq C\,\|v\|_V \text{ für alle } v \in V\right\}.$$

(c) Bestimmen Sie die Operatornorm von T. (1)

5. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind: (5)

i) $(V, \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

ii) Wenn die Reihe über eine gegeben Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ absolut konvergiert, dann konvergiert sie auch in V, d.h. es gibt $x \in V$ mit $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n x_k = x$.