Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 12.05.2017

Dr. Jochen Glück
Marius Müller
Fabian Rupp
Sommersemester 2017
Punktzahl: 13

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 3

6. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $(V, \|\cdot\|_V)$, $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume und sei $T : V \to W$ ein beschränkter linearer Operator. Zeigen Sie, dass (4)

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \inf\{C \geq 0 : \|Tv\|_W \leq C\|v\|_V \text{ für alle } v \in V\} \\
&= \sup\{\|Tv\|_W : v \in V, \|v\|_V \leq 1\} \\
&= \sup\{\|Tv\|_W : v \in V, \|v\|_V = 1\} \\
&= \sup\left\{\frac{\|Tv\|_W}{\|v\|_V}, v \in V\backslash\{0\}\right\}
\end{aligned}$$

gilt, wobei wir hier $\sup \emptyset := 0$ setzen.

7. Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ ein Banachraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $A \in \mathcal{L}(V) := \{T : V \to V : T \text{ linear und stetig}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $z \in \mathbb{K}$ die Folge (3)

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(zA)^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

in $\mathcal{L}(V)$ konvergiert. Hierbei ist $T^k := \underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{k-\text{mal}}$ für $T \in \mathcal{L}(V)$.

Wir definieren den Grenzwert

$$e^{zA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zA)^k}{k!}.$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{K}$ die *Halbgruppeneigenschaft* gilt, d.h. (2)

$$e^{(z+w)A} = e^{zA}e^{wA}.$$

Anleitung:

i) Verwenden Sie den Binomialsatz: Für $A, B \in \mathcal{L}(V)$ gilt $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$, falls A und B kommutieren, d.h. falls $AB = BA$.

ii) Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Cauchysche Produktformel, die Sie aus der Analysis kennen, auch für absolut-konvergente Reihen beschränkter Operatoren auf Banachräumen gilt.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildungen (4)

$$\mathcal{L}(V) \to \mathcal{L}(V), T \mapsto e^T \text{ und } \mathbb{K} \to \mathcal{L}(V), z \mapsto e^{zA}$$

für festes $A \in \mathcal{L}(V)$ stetig sind.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für alle $A, B \in \mathcal{L}(V)$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ die geometrische Summenformel $A^{n+1} - B^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} A^k(A-B)B^{n-k}$ gilt.