Dr. Jochen Glück
Marius Müller
Fabian Rupp
Sommersemester 2017
Punktzahl: 13

Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 26.05.2017

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 5

11. Sei $(x_j)_{j\in J}$ ein Netz in einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ und sei die Menge $J \times J$ mit der Relation $\preceq$ ausgestattet, die gegeben ist durch $(i_1, j_1) \preceq (i_2, j_2)$ genau dann, wenn $i_1 \preceq i_2$ und $j_1 \preceq j_2$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass $(J \times J, \preceq)$ eine gerichtete Menge ist. (1)

(b) Zeigen Sie, dass $(x_j)_{j\in J}$ genau dann ein Cauchy-Netz ist, wenn das Netz $(x_i - x_j)_{(i,j)\in J\times J}$ gegen Null konvergiert. (2)

Definition. Seien $(J, \preceq)$ und $(I, \preceq)$ gerichtete Mengen (wobei wir die Ordnungen auf J und I der einfacheren Notation halber mit demselben Symbol bezeichnen) und seien $(x_j)_{j\in J}$ und $(y_i)_{i\in I}$ Netze in einer Menge S.

(a) Eine Abbildung $\varphi : I \to J$ heißt *kofinal*, falls es für jedes $j_0 \in I$ ein $i_0 \in I$ gibt derart, dass $\varphi(i) \succeq j_0$ für alle $i \succeq i_0$ gilt.

(b) Wir sagen, das Netz $(y_i)_{i\in I}$ ist ein *Teilnetz* von $(x_j)_{j\in J}$, wenn es eine kofinale Abbildung $\varphi : I \to J$ gibt derart, dass $x_{\varphi(i)} = y_i$ für alle $i \in I$ gilt.

12. (a) Betrachten Sie die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$. Finden Sie eine Folge $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, die ein Teilnetz, aber keine Teilfolge von $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist. (1)

(b) Finden Sie ein Netz $(x_j)_{j\in J}$ ein $\mathbb{R}$ derart, dass es keine Folge gibt, die ein Teilnetz von $(x_j)_{j\in J}$ ist. (2)

13. (a) Sei $(x_j)_{j\in J}$ ein Netz in einem metrischen Raum (M, d), welches gegen ein Element $x \in M$ konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch jedes Teilnetz von $(x_j)_{j\in J}$ gegen x konvergiert. (1)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Reihe über $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Teilnetz der unbedingten Reihe über $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. (2)

(c) Sei $x \in X$. Zeigen Sie: Die unbedingte Reihe über $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen x, wenn für jede Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Reihe über $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert. (4)