Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 02.06.2017

Dr. Jochen Glück
Marius Müller
Fabian Rupp
Sommersemester 2017
Punktzahl: 12

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 6

14. Beweisen Sie Lemma 2.3.4 aus der Vorlesung: Ist $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Prähilbertraum, so definiert $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ eine stetige Abbildung. (4)

Hinweis: Vergewissern Sie sich zunächst, dass Sie verstehen was Stetigkeit auf $V \times V$ bedeutet. Vielleicht lohnt es sich, Proposition 1.1.5 a) nachzuschlagen.

15. In dieser Aufgabe beweisen wir, - leider mit einer Lücke - dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Wer die Lücke schließen will, dem empfiehlt sich das Buch von Reed, Simon "Fourier-Analysis and Self-Adjointness".

(a) Für ganzzahliges $k \in \mathbb{Z}$ setze $e_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$. Zeigen Sie, dass $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ein Orthonormalsystem in $L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C})$ ist. (2)

(b) Nun verwenden Sie ohne Beweis, dass der Aufspann der $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ auch dicht in $L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C})$ ist. Damit ist jede Funktion $f \in L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C})$ im Abschluss dieses Aufspanns. Proposition 2.3.6 schlägt dann eine Reihenentwicklung für f vor . Diese nennt man die Fourier-Entwicklung von f. Berechnen Sie die Fourier-Entwicklung von $f(x) = x$ und zeigen Sie damit, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. (2)

16. Wir definieren wie auf Blatt 4 $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ als den (Hilbert-) Raum aller quadratsummierbaren Folgen. Außerdem sei e_n die Folge, die an allen Stellen eine Null hat außer an der n-ten, wo sie eine Eins hat. Zeigen Sie, dass die unbedingte Reihe über $\left(\frac{1}{n} e_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, aber die Reihe $\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} e_n\right)_{N \in \mathbb{N}}$ in $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ nicht absolut konvergiert. (4)