Universität Ulm

Abgabe: Freitag, 16.06.2017

Dr. Jochen Glück
Marius Müller
Fabian Rupp
Sommersemester 2017
Punktzahl: 9 + 7*

Übungen Elemente der Funktionalanalysis: Blatt 7

17. Es sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prähilbertraum, $C \subset V$ konvex und $x, z \in V$. Dann sind die folgenden zwei Behauptungen äquivalent: (5)

1. z ist das Proximum von x in C.
2. Es ist $z \in C$ und für jedes $y \in C$ gilt $\operatorname{Re}\langle x - z, y - z\rangle \leq 0$.

18. (a) Es sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum. Zeigen Sie, dass jede abgeschlossene, konvexe Teilmenge von H genau ein Element mit minimaler Norm besitzt. (1)

Die nächsten Aufgaben sollen zeigen, dass Dinge schief gehen, wenn man die Vollständigkeit weglässt oder auch, wenn man einen allgemeinen Banachraum betrachtet. Man beachte, dass zwei Sachen schief gehen können: Existenz und Eindeutigkeit. Allerdings sagt Theorem 2.4.2, dass im Prähilbert-Fall maximal die Existenz schief gehen kann.

(b) Es sei $c_{00}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ die Menge aller abbrechenden reellwertigen Folgen mit dem Skalarprodukt (3*)

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Dass es sich um ein Skalarprodukt handelt, muss nicht gezeigt werden. Weiter sei $K := \left\{x \in c_{00}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \geq 1\right\}$. Zeigen Sie: K ist eine abgeschlossene, konvexe Menge von $c_{00}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, aber es gibt in K kein Element mit minimaler Norm. Insbesondere ist $c_{00}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ bezüglich dieses Skalarproduktes kein Hilbertraum.

(c) Betrachten Sie nun den Banachraum $L^1([0,1], \mathbb{R})$ und definieren Sie (3)
$K := \left\{f \in L^1([0,1], \mathbb{R}) : \int_0^1 f dx \geq 1\right\}$. Zeigen Sie wiederum, dass es sich um eine konvexe abgeschlossene Menge handelt aber es gibt in K mehrere Elemente mit minimaler Norm.

19. Die kommende Aufgabe beschäftigt sich mit dem Satz von Fischer-Riesz. Es sei H ein Hilbertraum mit Orthonormalbasis E. Es sei J die Abbildung aus dem Satz von Fischer-Riesz Sei $T : H \to H$ linear und stetig. Dann kommutiert das folgende Diagramm: (4*)

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "T"] \arrow[d, "J"'] & H \arrow[d, "J"] \\
\ell^2(E, \mathbb{K}) \arrow[r, "JTJ^{-1}"'] & \ell^2(E, \mathbb{K})
\end{tikzcd}$$

Sei nun $H = L^2([0,1], \mathbb{C})$. Sei $m \in C([0,1], \mathbb{C})$ und $T : H \to H, T(f)(x) = m(x)f(x)$. Berechnen Sie $JTJ^{-1}e_f$ für alle $f \in E$, wobei e_f das Element von $\ell^2(E, \mathbb{K})$ ist, was nur an der f-ten Stelle eine 1 und sonst nur Nullen hat.

Bemerkung: In einem gewissen Sinne berechnet man hier eine verallgemeinerte Matrixdarstellung des Operators T bezüglich der Orthonormalbasis E.